

# Endomorphismenringe von Permutationsmoduln auf den Nebenklassen einer $p$ -Sylowgruppe

Von der Fakultät für Mathematik,  
Informatik und Naturwissenschaften  
der RWTH Aachen University  
zur Erlangung des akademischen Grades  
einer Doktorin der Naturwissenschaften  
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematikerin

Natalie Naehrig

geborene Ganser

aus Stolberg (Rhld.)

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß  
Universitätsprofessor Dr. Burkhard Külshammer  
Universitätsprofessor Dr. Herbert Pahlings

Tag der mündlichen Prüfung: 8. August 2008

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Notationen und Konventionen . . . . .	1
1.2	Idempotente . . . . .	4
1.3	Modulare Systeme . . . . .	9
1.4	Zerlegungsmatrizen von Gittern . . . . .	12
1.5	Symmetrische Algebren . . . . .	13
1.6	Das Schur-Element . . . . .	15
1.7	Permutationsmoduln . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Endomorphismenringe von Permutationsmoduln</b>	<b>19</b>
2.1	Strukturanalyse . . . . .	20
2.2	Endomorphismenringe aus $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$ . . . . .	30
2.3	Charaktertafeln . . . . .	32
2.4	Das Zentrum . . . . .	37
2.5	Symmetrische Endomorphismenringe . . . . .	40
2.6	Das Schur-Element . . . . .	41
2.7	Halbeinfachheit . . . . .	42
2.8	Blöcke . . . . .	44
2.9	Zerlegungsmatrizen . . . . .	47
2.10	Projektivitätskriterien . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Alperins Gewichtsvermutung</b>	<b>53</b>
3.1	Green-Korrespondenz . . . . .	54
3.2	Blocktheorie . . . . .	56
3.3	Alperins Gewichtsvermutung . . . . .	60
3.4	Der quasi-Frobenius-Fall . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Endomorphismenringe als <math>G</math>-Algebren</b>	<b>73</b>
4.1	Punkte und Exomorphismen . . . . .	73
4.2	$G$ -Algebren und innere $G$ -Algebren . . . . .	75
4.3	Der Brauer-Homomorphismus . . . . .	77
4.4	Punktierte Gruppen . . . . .	80
4.5	Ordnungsrelationen . . . . .	81

4.6	Induktion . . . . .	85
4.7	Defektttheorie . . . . .	87
4.8	Defektttheorie bei Permutationsmoduln . . . . .	89
4.9	Die Puig-Korrespondenz . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Rechnerische Ergebnisse</b>	<b>97</b>
5.1	Zur Berechnung von Green-Korrespondenten . . . . .	97
5.2	Fehlgeschlagene Versuche . . . . .	103
5.3	Eine Vermutung . . . . .	114
5.4	Berechnung der Zerlegungsmatrizen . . . . .	118
5.5	Anmerkung zu den Ergebnissen . . . . .	127
5.6	Datensammlung . . . . .	133
5.6.1	$G = A_5$ . . . . .	133
5.6.2	$G = S_5$ . . . . .	140
5.6.3	$G = A_6$ . . . . .	147
5.6.4	$G = S_6$ . . . . .	156
5.6.5	$G = A_7$ . . . . .	166
5.6.6	$G = S_7$ . . . . .	180
5.6.7	$G = A_8$ . . . . .	195
5.6.8	$G = S_8$ . . . . .	200
5.6.9	$G = A_9$ . . . . .	202
5.6.10	$G = M_{11}$ . . . . .	209
5.6.11	$G = M_{12}$ . . . . .	216
5.6.12	$G = M_{22}$ . . . . .	222
5.6.13	$G = U_3(3)$ . . . . .	224
5.6.14	$G = J_2$ . . . . .	230
5.6.15	$G = L_2(49)$ . . . . .	232
5.6.16	$G = L_2(8)$ . . . . .	235
5.6.17	$G = L_2(11)$ . . . . .	237
5.6.18	$G = L_2(13)$ . . . . .	241
5.6.19	$G = L_2(16)$ . . . . .	246
5.6.20	$G = L_2(17)$ . . . . .	249
5.6.21	$G = L_2(19)$ . . . . .	252
5.6.22	$G = L_2(27)$ . . . . .	257
5.6.23	$G = L_2(29)$ . . . . .	259
5.6.24	$G = L_3(2)$ . . . . .	261
5.6.25	$G = L_3(3)$ . . . . .	263
5.6.26	$G = L_3(4)$ . . . . .	265
5.6.27	$G = U_3(4)$ . . . . .	268
5.6.28	$G = U_3(5)$ . . . . .	269
5.6.29	$G = U_4(2)$ . . . . .	270
5.6.30	$G = \text{Sp}_4(4)$ . . . . .	272
5.6.31	$G = \text{Sz}(8)$ . . . . .	273

# Einleitung

## Gebiet der Arbeit

Algebraische Strukturen wie Gruppen oder Algebren sind zunächst abstrakte, durch bestimmte Axiome definierte Objekte. Um ihre Eigenschaften zu untersuchen und zu erfassen, bedarf es konkreter Realisierungen, zum Beispiel durch Matrix-Gruppen oder -Algebren. Diese Realisierungen – oder Darstellungen – für ein gegebenes Objekt zu finden und zu klassifizieren, ist die Aufgabe der Darstellungstheorie.

Die Klassifizierung von Darstellungen einer algebraischen Struktur beginnt bei der Klassifizierung von *irreduziblen* Darstellungen, die die kleinsten Bauteile aller Darstellungen bilden.

Die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen zerfällt auf natürliche Weise in zwei Teilgebiete. Über Körpern, deren Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt, sind die Darstellungen halbeinfach, d.h. jede Darstellung ist eine Summe von irreduziblen Darstellungen. Kennt man diese, so ist die Darstellungstheorie für die betrachtete Gruppe vollständig erfasst. Dieser Fall ist so gut handhabbar, dass hier die Klassifikation der Darstellungen der einfachen Gruppen weitgehend abgeschlossen und in so genannten *Charaktertafeln* abrufbar ist.

Ganz anders stellt sich das Problem bei der *modularen Darstellungstheorie* dar, d.h. bei Darstellungen über Körpern, deren Charakteristik die Gruppenordnung teilt. Hier gibt es Darstellungen, die sich nicht in Summen irreduzibler Darstellungen zerlegen lassen, obwohl sie selbst nicht irreduzibel sind. Oftmals sind nicht einmal die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen bekannt.

So sind in der modularen Darstellungstheorie noch viele allgemeine, tiefgreifende und erstaunliche Vermutungen seit Jahrzehnten unbewiesen. Eine dieser Vermutungen ist Alperins Gewichtsvermutung, benannt nach J. L. Alperin, der sie in den frühen Achtziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts äußerte und 1987 erstmals in [Alp87] veröffentlichte.

Zur Formulierung der Vermutung fixieren wir eine endliche Gruppe  $G$  und einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Ein *Gewicht* von  $G$  ist ein Paar  $(Q, S)$ , wobei  $Q \leq G$  eine  $p$ -Untergruppe und  $S$  ein einfacher  $kN_G(Q)$ -Modul mit Vertex  $Q$  ist. Alperins Gewichtsvermutung postuliert, dass die Anzahl der einfachen  $kG$ -Moduln (bis auf Isomorphie) gleich der Anzahl der Gewichte (bis auf Konjugation) ist.

Diese Vermutung ist überraschend, verbindet sie doch zwei Mengen, deren Elemente auf den ersten Blick in keinem strukturellen Zusammenhang stehen. Seit ihrer Formulierung haben viele Mathematiker die Vermutung für Klassen von Gruppen bewiesen oder äquivalente Formulierungen dafür gefunden. So hat Alperin selbst die Vermutung für Blöcke von Gruppen mit zyklischem Defekt in [Alp93] und für die symmetrischen Gruppen in [AF90] zusammen mit P. Fong bewiesen. Hinzu kommen Beweise für viele sporadische Gruppen,  $p$ -auflösbare Gruppen u.a. Bemerkenswert ist, dass M. Cabanes bereits 1984 in [Cab84] die Gewichtsvermutung für Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik bewiesen hat.

J.A. Alperin selbst hat angeregt, als Zugang zu seiner Gewichtsvermutung die Endomorphismenringe der Permutationsmoduln der Form  $k_P^G$ , wobei  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  ist, zu untersuchen. Daher werden in dieser Arbeit systematisch Endomorphismenringe solcher Permutationsmoduln untersucht. Ziel ist es, bestimmte Muster zu finden, die einen Hinweis auf den strukturellen Zusammenhang zwischen Gewichten und einfachen Moduln der Gruppe geben könnten. Die Auswertung der untersuchten Beispiele enttäuscht die Hoffnung, solche Muster zu finden, nicht<sup>1</sup>. Tatsächlich scheinen die Sockelkonstituenten dieser Endomorphismenringe das gesuchte Bindeglied darzustellen und führen uns zu folgender Vermutung:

**Vermutung:**

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ . Weiter sei  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ . Mit  $\mathfrak{E}^k$  bezeichnen wir den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  und mit  $\mathcal{S}$  eine Menge von Repräsentanten der einfachen Rechtsmoduln im Sockel von  $\mathfrak{E}^k$ . Dann gilt:

- (a)  $|\mathcal{S}| = |\{V : V \text{ ist einfacher } kG\text{-Modul}\}/\text{Isomorphie}|$ .
- (b)  $|\mathcal{S}| = |\{(Q, S) : (Q, S) \text{ ist ein Gewicht von } G\}/\text{Konjugation}|$ .

Offensichtlich folgt aus der Richtigkeit der obigen Vermutung Alperins Gewichtsvermutung. Unklar ist allerdings, ob umgekehrt aus Alperins Gewichtsvermutung auch die obige Vermutung folgt. Immerhin gibt die Vermutung Anlass zur Hoffnung, einen neuen Ansatz für den Beweis der Gewichtsvermutung zu finden und einfache  $kG$ -Moduln und Gewichte als algebraische Objekte mittels der Sockelkonstituenten von  $\mathfrak{E}^k$  zu verknüpfen. Ein Beweis könnte entsprechend (a) und (b) der obigen Vermutung in zwei Teilschritten erfolgen und die Schwierigkeit der Gewichtsvermutung über diese Umwege aufspalten.

Für den Fall, dass  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius ist, hat J. L. Green in seiner Arbeit [Gre78] bewiesen, dass die einfachen  $kG$ -Moduln (bis auf Isomorphie) in Bijektion zu den einfachen Sockelkonstituenten (wie auch zu den einfachen Konstituenten des

---

<sup>1</sup>25.09.2008: Die  $M_{11}$  bildet eine Ausnahme der Vermutung, vgl. auch Seite 213.

Kopfes) von  $\mathfrak{E}^k$  stehen. In diesem Fall reicht es, Teil (b) der Vermutung zu beweisen, um Alperins Gewichtsvermutung zu bestätigen.

M. Cabanes konnte Alperins Gewichtsvermutung für Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik beweisen, indem er an die oben erwähnte Arbeit von J. A. Green anknüpfte. In diesem Fall sind die betrachteten Endomorphismenringe nach [Tin80] quasi-Frobenius. M. Cabanes ist es gelungen zu zeigen, dass jeder direkte Summand des Permutationsmoduls  $k_P^G$  der Green-Korrespondent eines Gewichtsmoduls ist, woraus (b) in der Vermutung folgt.

## Inhalte der Kapitel

Im ersten Kapitel werden vor allem die allgemeinen theoretischen Grundlagen aufbereitet. Kernpunkte darin sind die Fitting-Korrespondenz und die Zerlegungsmatrizen von Gittern, die die Basis für alle rechnerischen Ansätze in dieser Arbeit bilden.

Das zweite Kapitel betrachtet die Endomorphismenringe von Permutationsmoduln und wendet die Ergebnisse aus dem ersten darauf an. So beginnen wir mit der gewöhnlichen Darstellungstheorie dieser Algebren und leiten, wie schon in [CR81] beschrieben, her, wie sich deren gewöhnliche Charaktertafel aus der zu Grunde liegenden Gruppe berechnen lässt. Diese Ergebnisse werden im rechnerischen Teil der Arbeit benutzt und im Computeralgebrasystem GAP als Funktion umgesetzt.

Im vierten Abschnitt des zweiten Kapitels stellen wir die Beziehungen zwischen dem Zentrum der Gruppenalgebra und dem Zentrum des betrachteten Endomorphismenrings heraus. Das kondensierte Zentrum der Gruppenalgebra lässt sich nämlich in das Zentrum der kondensierten Gruppenalgebra, also in das Zentrum des Endomorphismenrings einbetten. Alperin hat in [Alp08] gezeigt, dass der Faktor der Zentren als abelsche Gruppe endlich ist, und hat die Ordnung explizit angegeben. Wir können diese Aussage noch erweitern und zeigen, dass sämtliche Primteiler dieser Ordnung auch Primteiler der Gruppenordnung sind.

Wir untersuchen zudem hinreichende Bedingungen, wann ein solcher Endomorphismenring symmetrisch ist. Dabei finden wir Beispiele, die zeigen, dass die Eigenschaft symmetrische Algebra zu sein, von der Spurfunktion abhängt.

Der zweite Teil des zweiten Kapitels legt den Schwerpunkt auf die modulare Darstellungstheorie und beleuchtet (bereits bekannte) Ergebnisse zur Halbeinfachheit und Blocktheorie solcher Endomorphismenringe. Anschließend untersuchen wir die Aussagefähigkeit der Zerlegungsmatrix des Permutationsgitters im Hinblick auf die Reduktion modulo  $p$  der gewöhnlichen Konstituenten des Permutationscharakters. Es werden Bedingungen gefunden, unter denen die gewöhnlichen einfachen Moduln des Endomorphismenrings nach Reduktion modulo einer Primzahl einfach oder projektiv einfach bleiben.

Im Abschnitt 2.10 wird ein Kriterium beschrieben, das diese Frage mit Hilfe der

gewöhnlichen Charaktertafel klären soll. Allerdings ist dieses Kriterium nicht so stark wie das analoge Defekt-0-Kriterium für die Charaktere einer Gruppe, weil es nur auf bestimmte Charaktere des Endomorphismenrings angewendet werden kann.

Im dritten Kapitel wird die Theorie rund um Alperins Gewichtsvermutung erarbeitet. Wir beschreiben dabei auch bekannte Ergebnisse, mit Hilfe derer man rechnerisch Gewichtsmoduln bestimmt.

Am Ende des Kapitels interpretieren wir das Ergebnis von J.A. Greens Arbeit [Gre78] über quasi-Frobenius Algebren im Sinne von Alperins Gewichtsvermutung. Sie ist nämlich genau dann für die Klasse von Gruppen mit Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$ , der quasi-Frobenius ist, bewiesen, wenn alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  einfache Green-Korrespondenten im Normalisator ihres Vertices haben. Tatsächlich war es das Ergebnis dieser Arbeit, das uns bewogen hat, die Sockelkonstituenten von  $\mathfrak{E}^k$  zu untersuchen, wodurch wir zu den Vermutungen in Abschnitt 5.3 gelangen konnten.

Um Alperins Vermutung für die Klasse von Gruppen mit Endomorphismenringen von Permutationsmoduln, die quasi-Frobenius sind, in speziellen Fällen beweisen zu können, haben wir eine allgemeinere Sichtweise von Algebren im vierten Kapitel eingeführt. Sie folgt der in den Achtziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts entwickelten Theorie von L. Puig, die in J. Thévenaz' Buch [Thé95] über  $G$ -Algebren aufbereitet wird. Sie führt als starkes Instrument den Brauer-Homomorphismus ein, der sich später als verbindendes Mittel zwischen projektiven Moduln, Permutationsmoduln und Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln herausstellt. So gelingt es am Ende des vierten Kapitels, Alperins Gewichtsvermutung für quasi-Frobenius Endomorphismenringe von  $k_P^G$  zu beweisen, wenn die Vertices aller Gewichte entweder trivial oder  $p$ -Sylowgruppen sind oder wenn sämtliche Normalisatoren dieser Vertices  $p$ -Gruppen sind.

Im ersten Teil des fünften Kapitels beschreiben wir, wie man sich ein Ergebnis von Burry in [Bur82] zu Nutze machen kann, um die Zerlegungen von großen Moduln explizit behandeln zu können.

Wir haben oben bereits angedeutet, dass ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit die rechnerische Untersuchung vieler Beispiele ist, um strukturelle Muster zu entdecken. Daher haben wir im zweiten Teil des fünften Kapitels Ansätze beschrieben, die sich als Sackgasse oder ineffizient erwiesen haben. Wir haben auch diese Ideen in die Arbeit aufgenommen, damit andere Interessierte an vielversprechendere Ansätze anknüpfen können. Der Logik folgend hätten unsere Vermutungen erst nach der Analyse der Beispiele formuliert werden sollen. Damit der Leser im Vorhinein den Blick auf bestimmte Merkmale fokussieren kann, beschreiben wir die Beobachtungen vor den eigentlichen Beispielen und formulieren sie hoffnungsvoll als Vermutung.

Der letzte Teil des fünften Kapitels listet tabellarisch die Ergebnisse des rechnerischen Teils der Arbeit auf. Anhand von zwei Beispielen wird die Notation und Vorgehensweise detailliert kommentiert, so dass die restlichen Ergebnisse in kompakter Form dargestellt werden können. Diese rechnerischen Ergebnisse bilden das Herz dieser Arbeit. Durch ihre Vielzahl konnte das erhoffte Muster, das wir als Vermutung formuliert haben, erkannt werden.

## Danksagung

Zuallererst danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Gerhard Hiß, indem ich mich tief verbeuge. Er hat mir nicht nur durch stete Betreuung wertvolle Hilfe geleistet und ist mit Geduld meinem Unwissen entgegengetreten, sondern hat mir in der speziellen Situation, in der ich anfangs an ihn herantrat, die Möglichkeit gegeben, dieses äußerst interessante Thema zu bearbeiten.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Burkhard Külshammer, der sich bereit erklärt hat, als Gutachter zur Verfügung zu stehen. Ich danke ihm zudem für die vielen wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge zur Sprache und zum Inhalt dieser Arbeit. Ich danke ebenso Herrn Prof. Dr. Herbert Pahlings für seine Bereitschaft, weiterer Gutachter dieser Arbeit zu sein. Auch ihm danke ich für die Hinweise auf sprachliche Unstimmigkeiten und auf inhaltliche Verbesserungen.

Mein Dank gilt auch Dr. habil. Jürgen Müller, der viel Zeit für meine Fragen und speziellen Probleme beim Benutzen der MeatAxe geopfert hat.

Desweiteren danke ich Johannes Orlob und Dr. Britta Späth für ihre wertvollen Kommentare zu sprachlichen und inhaltlichen Ungereimtheiten früherer Fassungen dieser Arbeit.

Ich danke Dr. Christian Ringe für die nette Atmosphäre in unserem Büro und die vielen hilfreichen organisatorischen Ratschläge zum Promotionsverfahren.

Dr. Frank Lübeck hat mir oft mit computertechnischen Problemen weitergeholfen, weswegen ich auch ihm zu Dank verpflichtet bin.

Insgesamt möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für Mathematik für das nette Arbeitsklima bedanken.

Meinen Schwiegereltern danke ich für ihre Unterstützung durch viele kinderfreie Nachmittage.

Einen besonderen Dank spreche ich meinen Eltern aus, ohne die ich diese Dankesworte nicht schreiben könnte, die mir dieses Unterfangen erst ermöglicht haben.

Schließlich danke ich meinem Mann Michael für die Unterstützung während der gesamten Zeit, für das genaue Korrekturlesen, für alles.



# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Notationen und Konventionen

Wir halten in diesem Abschnitt Konventionen und Bezeichnungen fest, die für die gesamte Arbeit gelten sollen, wenn nicht ausdrücklich an gegebener Stelle anders darauf hingewiesen wird.

**Gruppen.** Alle auftretenden Gruppen seien endliche Gruppen. Wir schreiben  $H \leq G$ , falls  $H$  eine Untergruppe, und  $H \trianglelefteq G$ , falls  $H$  ein Normalteiler von  $G$  ist. Für eine Primzahl  $p$  bezeichnen wir die Menge der  $p$ -Sylowgruppen von  $G$  mit  $\text{Syl}_p(G)$ . Schließlich schreiben wir  $H \leq_G H'$  für Untergruppen  $H, H' \leq G$ , falls ein  $g \in G$  mit  $H^g := g^{-1}Hg \leq H'$  existiert.

**Ringe.** Von einem Ring  $\mathcal{R}$  nehmen wir stets an, dass er ein Einselement  $1_{\mathcal{R}}$  enthält. Die Menge der in  $\mathcal{R}$  invertierbaren Elemente bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}^*$ . Ideale von  $\mathcal{R}$  sind, wenn nicht anders gesagt, Rechtsideale. Ist  $\mathfrak{I}$  sogar ein zweiseitiges Ideal von  $\mathcal{R}$ , so schreiben wir  $\mathfrak{I} \trianglelefteq \mathcal{R}$ . Wir können in diesem Fall den Faktorring  $\mathcal{R}/\mathfrak{I}$  bilden, den wir mit  $\overline{\mathcal{R}}$  bezeichnen. Das Bild von  $x \in \mathcal{R}$  unter der natürlichen Abbildung  $\mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$  bezeichnen wir mit  $\bar{x}$ . Das **Jacobson-Radikal**  $J(\mathcal{R})$  von  $\mathcal{R}$  ist der Durchschnitt aller maximalen Ideale von  $\mathcal{R}$ .

Ist  $\mathcal{R} = \mathcal{O}$  ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper  $K$  der Charakteristik 0 und bezeichnet  $\mathfrak{p}$  das eindeutige maximale Ideal in  $\mathcal{O}$  mit Restklassenkörper  $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$  der Charakteristik  $p$ , dann nennen wir das Tripel  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  **$p$ -modulares System**. Enthält  $K$  für eine feste Gruppe  $G$  alle  $|G|$ -ten Einheitswurzeln, so heißt  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  **$p$ -modulares Zerfällungssystem für  $G$** . In diesem Zusammenhang sei betont, dass die Schreibweise  $\mathcal{R}$  in dieser Arbeit einen generischen und nicht näher spezifizierten Ring suggeriert, während ein Ring, der mit  $\mathcal{O}$  bezeichnet wird, auf einen Bewertungsring deutet.

**Matrizen.** Es seien  $\mathcal{R}$  ein beliebiger Ring und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann bezeichnen wir die Menge der  $n \times n$  Matrizen über  $\mathcal{R}$  mit  $\text{Mat}_n(\mathcal{R})$ .

**Moduln.** Es sei  $\mathcal{R}$  ein Ring. Wir nehmen grundsätzlich an, dass alle  $\mathcal{R}$ -Moduln Rechtsmoduln und endlich erzeugt sind. Sollten wir doch einen Linksmodul  $M$  betrachten, so verdeutlichen wir dies durch die Schreibweise  ${}_{\mathcal{R}}M$ . Der Ring  $\mathcal{R}$  ist sowohl Rechts- als auch Linksmodul, was wir durch die Schreibweise  ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}$  bzw.  $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$  kennzeichnen. Wir nennen  $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$  bzw.  ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}$  den **regulären** bzw. den **links-regulären Modul von  $\mathcal{R}$** . Als solcher ist er endlich erzeugt und die Untermoduln entsprechen den Rechts- bzw. Linksidealen.

Wir nennen einen Modul **unzerlegbar**, falls er nicht als direkte Summe zweier von 0 verschiedener Moduln geschrieben werden kann. Für zwei  $\mathcal{R}$ -Moduln  $M, N$  schreiben wir  $M \mid N$ , falls  $M$  isomorph zu einem direkten Summanden von  $N$  ist. Enthält  $M$  keine echten Untermoduln und ist  $M \neq 0$ , so heißt  $M$  **einfach**.

Ein endlich erzeugter  $\mathcal{R}$ -Modul  $M$  heißt **frei** über  $\mathcal{R}$ , falls er eine Basis über  $\mathcal{R}$  besitzt, d.h. falls es ein Erzeugendensystem  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  gibt, für das aus  $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i m_i = 0$  für  $x_i \in \mathcal{R}$  stets  $x_i = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$  folgt. Sind  $\mathcal{R}$  ein Hauptidealring und  $M$  ein endlich erzeugter freier  $\mathcal{R}$ -Modul, so haben je zwei Basen von  $M$  die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Anzahl nennen wir den **Rang von  $M$  über  $\mathcal{R}$**  und bezeichnen sie mit  $\text{rang}_{\mathcal{R}}(M)$ .

Die Kategorie der endlich erzeugten  $\mathcal{R}$ -Moduln bezeichnen wir mit  $\text{mod-}\mathcal{R}$  und die Kategorie der endlich erzeugten  $\mathcal{R}$ -Linksmoduln mit  $\mathcal{R}\text{-mod}$ .

**Gruppenring, Induktion und Restriktion.** Es seien  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring und  $G$  eine Gruppe. Dann bezeichnen wir den Gruppenring von  $G$  über  $\mathcal{R}$  mit  $\mathcal{R}G$ . Die Abbildung von  $\mathcal{R}G$  zur Menge  $F_{\mathcal{R}}(G)$  der  $\mathcal{R}$ -wertigen Funktionen auf  $G$ , definiert durch  $\sum r_x x \mapsto (f : G \rightarrow \mathcal{R}, x \mapsto r_x)$ , ist ein  $\mathcal{R}$ -Algebren-Isomorphismus. Dabei definieren wir für  $e, f \in F_{\mathcal{R}}(G)$  das Produkt von  $e$  und  $f$  durch

$$e \cdot f(g) = \sum_{y \in G} e(y) f(y^{-1}g)$$

für alle  $g \in G$ .

Für eine Teilmenge  $X \subseteq G$  führen wir für die Summe der Elemente die Schreibweise  $\hat{X} := \sum_{x \in X} x \in \mathcal{R}G$  ein.

Sind  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$  und  $M$  ein  $\mathcal{R}G$ -Modul, so bezeichnen wir die **Restriktion** von  $M$  auf  $\mathcal{R}H$  mit  $M_H$ . Ist  $N$  ein  $\mathcal{R}H$ -Modul, so sei  $N^G$  der **induzierte  $\mathcal{R}G$ -Modul**  $N \otimes_{\mathcal{R}H} \mathcal{R}G$ . Den trivialen  $\mathcal{R}G$ -Modul bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}_G$ .

**Homomorphismen.** Es seien  $\mathcal{R}$  ein Ring und  $\mathcal{R}$ -Moduln  $M, N$  gegeben. Dann ist die Menge aller  $\mathcal{R}$ -Homomorphismen von  $M$  nach  $N$  eine kommutative Gruppe und wird mit  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(M, N)$  bezeichnet. Homomorphismen schreiben wir von

links, d.h. für  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(M, N)$  und  $m \in M$  schreiben wir  $\varphi(m)$  für das Bild von  $m$  unter  $\varphi$ . Weiterhin sei  $\text{Ker}(\varphi)$  der Kern und  $\text{Im}(\varphi)$  das Bild von  $\varphi$ . Es ist  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(M, M) =: \text{End}_{\mathcal{R}}(M)$  ein Ring mit Multiplikation  $\circ$ , der **Endomorphismenring von  $M$** .

Sind  $G$  eine Gruppe,  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring und  $M, N$   $\mathcal{R}G$ -Moduln, so kann  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(M, N)$  als  $\mathcal{R}G$ -Modul aufgefasst werden, indem wir für  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(M, N)$  und  $g \in G$  die Abbildung  $\varphi.g$  durch  $\varphi.g(m) := \varphi(mg^{-1})g$  für alle  $m \in M$  definieren.

**Algebren, Ordnungen und Gitter.** Es seien  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{A}$  ein Ring. Falls ein Ring-Homomorphismus  $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow Z(\mathfrak{A})$  von  $\mathcal{R}$  in das Zentrum von  $\mathfrak{A}$  existiert, so heißen  $\mathfrak{A}$  eine  **$\mathcal{R}$ -Algebra** und  $\mathcal{R}$  der **Koeffizientenring von  $\mathfrak{A}$** . Insbesondere ist  $\mathfrak{A}$  ein  $\mathcal{R}$ -Modul. Ist dieser endlich erzeugt und frei, so nennen wir  $\mathfrak{A}$  eine  **$\mathcal{R}$ -Ordnung**. Ein endlich erzeugter und freier  $\mathcal{R}$ -Modul heißt  **$\mathcal{R}$ -Gitter**. Ist  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{R}$ -Ordnung, so heißt ein  $\mathfrak{A}$ -Modul, der zudem ein  $\mathcal{R}$ -Gitter ist,  **$\mathfrak{A}$ -Gitter**.

Ist ein Ring-Homomorphismus zwischen zwei  $\mathcal{R}$ -Algebren zugleich ein  $\mathcal{R}$ -Homomorphismus, so sprechen wir von einem  **$\mathcal{R}$ -Algebren-Homomorphismus**.

Es seien  $K$  ein Körper,  $\mathfrak{A}$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra und  $S$  ein einfacher  $\mathfrak{A}$ -Modul. Ist  $\text{End}_{\mathfrak{A}}(S) = K \cdot \text{id}_S$ , so heißt  $S$  **zerfallend über  $K$** . Ist jeder einfache  $\mathfrak{A}$ -Modul zerfallend über  $K$ , so heißt  $\mathfrak{A}$  **zerfallend über  $K$**  und  $K$  ist ein **Zerfällungskörper** von  $\mathfrak{A}$ .

**Charaktere.** Es seien  $G$  eine Gruppe und  $K$  ein Körper. Dann bezeichnen wir die Menge der  $K$ -wertigen Klassenfunktionen von  $G$  mit  $CL_K(G)$  und die der irreduziblen Charaktere von  $G$  mit  $\text{Irr}_K(G)$ .

Ist  $\text{char}(K) = 0$ , so ist für  $\chi, \psi \in CL_K(G)$  das **innere Produkt auf  $CL_K(G)$**  durch  $\langle \chi, \psi \rangle := 1/|G| \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$  definiert. Ist  $H \leq G$  und  $\chi$  ein Charakter von  $H$ , so ist der **induzierte Charakter von  $\chi$**  definiert durch

$$\chi^G(g) := 1/|H| \sum_{x \in G, x^{-1}gx \in H} \chi(x^{-1}gx).$$

**Schreibweisen.** Es seien  $p$  eine Primzahl und  $x \in \mathbb{Z}$ . Dann bezeichnet  $|x|_p$  die höchste Potenz von  $p$ , die  $x$  teilt, also  $|x|_p = p^\alpha$ , falls  $x = p^\alpha \cdot r$  mit  $p \nmid r$ .

## 1.2 Idempotente

Es sei  $\mathfrak{A}$  ein artinscher Ring.

### 1.2.1 Definition (Idempotent)

Ein von Null verschiedenes Element  $\mathfrak{e} \in \mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}$  heißt **Idempotent** von  $\mathfrak{A}$ . In diesem Fall ist  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$  ein Ideal von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}\mathfrak{e}$  ist ein Ring mit Einselement  $\mathfrak{e}$ . Zwei Idempotente  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in \mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 = 0 = \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1$  heißen **orthogonal**. Ein Idempotent, das nicht als Summe zweier orthogonaler Idempotente dargestellt werden kann, nennen wir **primitiv**. Für ein Idempotent  $\mathfrak{e}$  heißt  $\mathfrak{e} = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{e}_i$  eine **Idempotentzerlegung von  $\mathfrak{e}$** , falls die  $\mathfrak{e}_i$  paarweise orthogonale Idempotente sind. Ein Idempotent, das zudem Element des Zentrums  $Z(\mathfrak{A})$  ist, heißt **zentrales Idempotent**.

Idempotente spielen eine außerordentliche Rolle bei der Zerlegung von Algebren.

### 1.2.2 Satz (vgl. [NT89, Thm. I.4.1])

Es sei  $\mathfrak{e}$  ein Idempotent von  $\mathfrak{A}$ . Ist  $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \dots + \mathfrak{e}_n$  eine Idempotentzerlegung von  $\mathfrak{e}$ , so ist

$$\mathfrak{e}\mathfrak{A} = \mathfrak{e}_1\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{e}_2\mathfrak{A} \oplus \dots \oplus \mathfrak{e}_n\mathfrak{A}$$

eine direkte Summenzerlegung von  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$  in Ideale von  $\mathfrak{A}$ . Ist umgekehrt

$$\mathfrak{e}\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{I}_n$$

eine direkte Summenzerlegung von  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$  in Ideale, so ist  $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \dots + \mathfrak{e}_n$  mit  $\mathfrak{e}_i \in \mathfrak{I}_i$  eine Idempotentzerlegung von  $\mathfrak{e}$ . Somit stehen die Idempotentzerlegungen von  $\mathfrak{e}$  in bijektiver Korrespondenz zu den direkten Summenzerlegungen von  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$ . Eine analoge Aussage können wir für die Zerlegung von  $\mathfrak{A}\mathfrak{e}$  in Linksideale formulieren.  $\square$

Wir sehen also, dass  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$  als  $\mathfrak{A}$ -Modul und  $\mathfrak{A}\mathfrak{e}$  als  $\mathfrak{A}$ -Linksmodul genau dann unzerlegbar sind, wenn  $\mathfrak{e}$  primitiv ist. Die Korrespondenz in diesem Satz hat Fitting in [Fit33] verallgemeinern können. Zuvor diskutieren wir jedoch ein vorbereitendes Lemma.

### 1.2.3 Lemma (vgl. [NT89, Thm. I.4.4])

Es seien  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$  Idempotente von  $\mathfrak{A}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathfrak{e}_1\mathfrak{A} \cong \mathfrak{e}_2\mathfrak{A}$  als  $\mathfrak{A}$ -Moduln.
- (b)  $\mathfrak{A}\mathfrak{e}_1 \cong \mathfrak{A}\mathfrak{e}_2$  als  $\mathfrak{A}$ -Linksmoduln.
- (c) Es existieren  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{e}_2\mathfrak{A}\mathfrak{e}_1$  und  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{e}_1\mathfrak{A}\mathfrak{e}_2$  mit  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_2$  und  $\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_1$ .  $\square$

**1.2.4 Lemma**

Es seien  $M$  ein  $\mathfrak{A}$ -Modul und  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathfrak{A}}(M)$  der Endomorphismenring von  $M$ . Der Modul  $M$  zerlege sich in die unzerlegbaren Summanden

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n.$$

Wir identifizieren  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M_i)$  mit der Untergruppe  $\{\varphi \in \mathfrak{E} : \varphi(M) \subseteq M_i\}$  und bezeichnen mit  $\mathfrak{e}_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M_i)$  für  $1 \leq i \leq n$  die Projektionen auf die jeweiligen direkten Summanden  $M_i$ . Dann ist  $\mathfrak{e}_i(M) = M_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

(a) Es ist  $\mathfrak{e}_i\mathfrak{E} = \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M_i)$  ein Ideal von  $\mathfrak{E}$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

(b) Es ist  $\mathfrak{E}\mathfrak{e}_i \cong \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M_i, M)$  ein Linksideal von  $\mathfrak{E}$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

**Beweis:**

(a) Es ist klar, dass  $\mathfrak{e}_i\mathfrak{E} \subseteq \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M_i)$  gilt. Ist  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M_i)$ , so definiere  $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{E}$  durch

$$\tilde{\varphi}((m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n)) := (0, 0, \dots, 0, \varphi(m_1, m_2, \dots, m_n), 0, \dots, 0).$$

Dann ist  $\mathfrak{e}_i\tilde{\varphi} = \varphi$ .

(b) Betrachte die Abbildung

$$\theta : \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M_i, M) \rightarrow \mathfrak{E}\mathfrak{e}_i, \varphi \mapsto \varphi \circ \mathfrak{e}_i.$$

Dann ist  $\theta$  ein  $\mathfrak{E}$ -Modul-Isomorphismus. □

**1.2.5 Satz (Fitting-Korrespondenz, [NT89, Thm. I.5.4])**

Es seien  $M$  ein  $\mathfrak{A}$ -Modul und  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathfrak{A}}(M)$ . Weiter seien

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

eine Zerlegung von  $M$  in direkte Summanden und  $\mathfrak{e}_i \in \mathfrak{E}$  die Projektion auf  $M_i$  für  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist

$$\text{id}_M = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \dots + \mathfrak{e}_n$$

eine Idempotentzerlegung von  $\text{id}_M$ . Umgekehrt liefert jede solche Idempotentzerlegung von  $\text{id}_M$  eine direkte Summenzerlegung von  $M$  in die Komponenten  $M_i := \mathfrak{e}_i(M)$ . Außerdem erhält man die korrespondierenden Zerlegungen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{e}_1\mathfrak{E} \oplus \mathfrak{e}_2\mathfrak{E} \oplus \dots \oplus \mathfrak{e}_n\mathfrak{E}$$

in die  $\mathfrak{E}$ -Moduln  $\mathfrak{e}_i\mathfrak{E} = \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M_i)$  bzw.

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{E}\mathfrak{e}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{E}\mathfrak{e}_n$$

in die  $\mathfrak{E}$ -Linksmodule  $\mathfrak{E}\mathfrak{e}_i \cong \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M_i, M)$ . Insbesondere ist  $M_i$  genau dann unzerlegbar, wenn  $\mathfrak{e}_i\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{E}\mathfrak{e}_i$  unzerlegbar ist. Weiterhin ist  $M_i \cong M_j$  als  $\mathfrak{A}$ -Modul genau dann, wenn  $\mathfrak{e}_i\mathfrak{E} \cong \mathfrak{e}_j\mathfrak{E}$  als  $\mathfrak{E}$ -Modul bzw.  $\mathfrak{E}\mathfrak{e}_i \cong \mathfrak{E}\mathfrak{e}_j$  als  $\mathfrak{E}$ -Linksmodule gilt. □

Die Fitting-Korrespondenz ist eine grundlegende strukturelle Aussage, um Moduln mit ihren Endomorphismenringen (und umgekehrt) in Verbindung zu setzen. Sie ist das Verbindungsstück, ohne das die Beispiele am Ende dieser Arbeit nicht hätten berechnet werden können. Unsere Beobachtungen an den Beispielen deuten sogar darauf hin, dass die Endomorphismenringe von Permutationsmoduln möglicherweise eine Schlüsselrolle bei Alperins Gewichtsvermutung spielen (siehe Abschnitt 5.3). Kurz gesprochen wollen wir trotz des einfachen Beweises der Fitting-Korrespondenz ihre große Bedeutung hervorheben.

**1.2.6 Satz ([Lan83, Thm. 3.12, Cor. 3.13])**

Der reguläre Modul  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}$  zerlege sich in unzerlegbare Summanden  $P_i$ , das heißt

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{i=1}^t P_i.$$

Dann nennen wir für  $1 \leq i \leq t$  den Summanden  $P_i$  einen **PIM (projective indecomposable module)**.

Ist  $1 = \sum_{1 \leq i \leq t} \mathbf{e}_i$  mit  $\mathbf{e}_i \in P_i$  eine Zerlegung von  $1 \in \mathfrak{A}$ , so ist  $\{\mathbf{e}_i : 1 \leq i \leq t\}$  eine Menge von primitiven, paarweise orthogonalen Idempotenten. Diese Menge ist bis auf Assoziiertheit von Idempotenten eindeutig bestimmt.

Also können wir jedem PIM  $P_i$  ein primitives Idempotent  $\mathbf{e}_i$  zuordnen, für das  $P_i = \mathbf{e}_i \mathfrak{A}$  gilt.

Wir nennen einen  $\mathfrak{A}$ -Modul **projektiv**, falls er zu einer direkten Summe von PIMs von  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}$  isomorph ist.  $\square$

**1.2.7 Korollar**

Die Bezeichnungen seien wie in Satz 1.2.5. Dann bilden  $\{\mathbf{e}_i \mathfrak{E} : 1 \leq i \leq n\}$  bzw.  $\{\mathfrak{E} \mathbf{e}_i : 1 \leq i \leq n\}$  Repräsentantensysteme der unzerlegbaren projektiven  $\mathfrak{E}$ -Moduln bzw.  $\mathfrak{E}$ -Linksmoduln.  $\square$

Das Konzept von Idempotentklassen (so genannten Punkten), bei dem eine Klasse genau die Menge von untereinander assoziierten Idempotenten bildet, greifen wir in Kapitel 4 wieder auf, um die hier beschriebene Theorie von einem noch allgemeineren Standpunkt zu erfassen.

**1.2.8 Satz ([Lan83, Thm. 3.14, Cor. 3.15])**

Es seien  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  primitive Idempotenten von  $\mathfrak{A}$  und  $P_i := \mathbf{e}_i \mathfrak{A}$  für  $i = 1, 2$  die zugehörigen unzerlegbaren Moduln. Zudem sei für das Jacobson-Radikal  $J(\mathfrak{A})$  das Bild von  $\mathfrak{A}$  unter der kanonischen Reduktion modulo  $J(\mathfrak{A})$  mit  $\overline{\mathfrak{A}}$  bezeichnet.

- (a) Für  $i = 1, 2$  ist dann  $\mathbf{e}_i J(\mathfrak{A})$  der eindeutig bestimmte maximale Untermodul von  $P_i$ . Insbesondere ist  $P_i / \mathbf{e}_i J(\mathfrak{A})$  einfach.
- (b) Es ist  $P_1$  zu  $P_2$  genau dann isomorph, wenn  $P_1 / \mathbf{e}_1 J(\mathfrak{A})$  zu  $P_2 / \mathbf{e}_2 J(\mathfrak{A})$  isomorph ist. In diesem Fall sind  $\overline{\mathbf{e}}_1$  und  $\overline{\mathbf{e}}_2$  in  $\overline{\mathfrak{A}}$  sowie  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  in  $\mathfrak{A}$  assoziiert.

- (c) Es gibt eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von PIMs von  $\mathfrak{A}$  und den Isomorphieklassen von einfachen  $\mathfrak{A}$ -Moduln.  $\square$

### 1.2.9 Definition (Cartan-Matrix)

Es seien  $P_1 := \mathbf{e}_1\mathfrak{A}, P_2 := \mathbf{e}_2\mathfrak{A}, \dots, P_t := \mathbf{e}_t\mathfrak{A}$  Repräsentanten der Isomorphieklassen der PIMs von  $\mathfrak{A}$  und  $S_i := \mathbf{e}_i\mathfrak{A}/\mathbf{e}_iJ(\mathfrak{A})$  Repräsentanten der Isomorphieklassen der einfachen  $\mathfrak{A}$ -Moduln. Dann bezeichnen wir die Vielfachheit von  $S_i$  als Kompositionsfaktor in  $P_j$  mit  $c_{ij}$  und nennen die Matrix  $[c_{ij}]_{1 \leq i, j \leq t}$  die **Cartan-Matrix** von  $\mathfrak{A}$ .

### 1.2.10 Lemma

Es seien  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring,  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{R}$ -Algebra,  $\mathbf{e} \in \mathfrak{A}$  ein Idempotent und  $M$  ein  $\mathfrak{A}$ -Modul. Dann ist  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{e}\mathfrak{A}, M) \cong M\mathbf{e}$  als  $\mathcal{R}$ -Moduln.

Ist  $M = \mathbf{e}\mathfrak{A}$ , so ist  $\text{End}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{e}\mathfrak{A}) \cong \mathbf{e}\mathfrak{A}\mathbf{e}$  als  $\mathcal{R}$ -Algebren. Insbesondere ist  $\text{End}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}) \cong \mathfrak{A}$ .

**Beweis:** Die Abbildung  $\tau : \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{e}\mathfrak{A}, M) \longrightarrow M\mathbf{e}, \varphi \mapsto \varphi(\mathbf{e})$  ist offensichtlich  $\mathcal{R}$ -linear. Wegen  $\varphi(\mathbf{e}a) = \varphi(\mathbf{e})a$  für alle  $a \in \mathfrak{A}$  ist sie injektiv. Für  $m \in M\mathbf{e}$  gilt  $m\mathbf{e} = m$ . Daher ist die Abbildung  $\varphi_m(\mathbf{e}a) := ma$  in  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{e}\mathfrak{A}, M)$ . Somit ist  $\tau$  ein Isomorphismus.

Für  $M = \mathbf{e}\mathfrak{A}$  ist  $\tau$  ein Ring-Homomorphismus. Die letzte Aussage folgt mit  $\mathbf{e} = 1$ .  $\square$

### 1.2.11 Lemma (vgl. [Lan83, La. 4.2])

Ein PIM  $P_i$  von  $\mathfrak{A}$  hat genau dann einen zu  $S_j = \mathbf{e}_j\mathfrak{A}/\mathbf{e}_jJ(\mathfrak{A})$  isomorphen Kompositionsfaktor, wenn  $P_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\mathfrak{A}\mathbf{e}_j (\cong \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(P_j, P_i)) \neq 0$  ist.  $\square$

Der Isomorphismus zwischen  $\mathbf{e}\mathfrak{A}\mathbf{e}$  und dem Endomorphismenring von  $\mathbf{e}\mathfrak{A}$  für ein Idempotent von  $\mathfrak{A}$  ist von großer Bedeutung, wenn wir später strukturelle Analysen von speziellen Endomorphismenringen durchführen.

Ein wichtiges Beispiel finden wir bei der Kondensation von Algebren.

### 1.2.12 Definition und Bemerkung (Kondensation)

Es seien  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring,  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{R}$ -Algebra und  $\mathbf{e} \in \mathfrak{A}$  ein Idempotent. Betrachte die beiden Funktoren zwischen den Kategorien  $\text{mod-}\mathfrak{A}$  und  $\text{mod-}\mathbf{e}\mathfrak{A}\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \text{mod-}\mathfrak{A} &\longrightarrow \text{mod-}\mathbf{e}\mathfrak{A}\mathbf{e} \\ M &\mapsto M\mathbf{e} \cong M \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}\mathbf{e} \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{M\mathbf{e}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \text{mod-}\mathbf{e}\mathfrak{A}\mathbf{e} &\longrightarrow \text{mod-}\mathfrak{A} \\ N &\mapsto N \otimes_{\mathbf{e}\mathfrak{A}\mathbf{e}} \mathbf{e}\mathfrak{A} \\ \psi &\mapsto \psi \otimes \text{id}_{\mathbf{e}\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Wir nennen die Algebra  $e\mathfrak{A}e$  die **Kondensationsalgebra** und den Funktor  $\mathcal{F}$  den **Kondensationsfunktor von  $\mathfrak{A}$  relativ zu  $e$** . Der  $e\mathfrak{A}e$ -Modul  $Me$  heißt **Kondensation von  $M$** .

Ist  $\mathcal{R}$  ein Körper, so haben wir folgenden sehr nützlichen Zusammenhang zwischen  $\mathcal{R}$ -Algebren und kondensierten  $\mathcal{R}$ -Algebren:

**1.2.13 Lemma (vgl. [Mül03, Prop. (6.7)])**

Es seien  $F$  ein Körper,  $\mathfrak{A}$  eine  $F$ -Algebra und  $e \in \mathfrak{A}$  ein Idempotent von  $\mathfrak{A}$ .

- (a) Es sei  $S$  ein einfacher  $\mathfrak{A}$ -Modul. Falls  $Se \neq \{0\}$  ist, dann ist  $Se$  ein einfacher  $e\mathfrak{A}e$ -Modul.
- (b) Es seien  $S, S'$  einfache  $\mathfrak{A}$ -Moduln und  $Se \neq 0 \neq S'e$ . Dann ist  $S \cong S'$  als  $\mathfrak{A}$ -Moduln genau dann, wenn  $Se \cong S'e$  als  $e\mathfrak{A}e$ -Moduln gilt.
- (c) Es sei  $T$  ein einfacher  $e\mathfrak{A}e$ -Modul. Dann gibt es einen einfachen  $\mathfrak{A}$ -Modul  $S$ , so dass  $T \cong Se$  als  $e\mathfrak{A}e$ -Modul gilt.  $\square$

**1.2.14 Lemma (vgl. [Fei82, La. I.7.5, La. I.7.6] und [NT89, p. 37])**

Es existiert eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige endliche Zerlegung von  $1 \in \mathfrak{A}$  in paarweise orthogonale, zentral primitive Idempotente. Ist  $1 = \sum_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i$  eine solche Zerlegung, so ist  $\{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq s\}$  die Menge der zentral primitiven Idempotente von  $\mathfrak{A}$ . Insbesondere sind zwei zentral primitive Idempotente entweder gleich oder orthogonal.  $\square$

**1.2.15 Satz (vgl. [NT89, Thm. I.4.7])**

Es sei  $\varepsilon$  ein zentrales Idempotent von  $\mathfrak{A}$ . Ist  $\varepsilon = \sum_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i$  eine Idempotentzerlegung in zentral primitive Idempotente  $\varepsilon_i$  von  $\mathfrak{A}$ , so ist

$$\varepsilon\mathfrak{A} = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i\mathfrak{A}$$

eine Zerlegung von  $\varepsilon\mathfrak{A}$  in unzerlegbare zweiseitige Ideale von  $\mathfrak{A}$ .

Umgekehrt gibt es zu jeder Zerlegung von  $\varepsilon\mathfrak{A}$  in unzerlegbare zweiseitige Ideale  $\mathfrak{J}_i$  von  $\mathfrak{A}$  der Form  $\varepsilon\mathfrak{A} = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathfrak{J}_i$  eine primitive Idempotentzerlegung von  $\varepsilon$  in zentral primitive Idempotente der Form

$$\varepsilon = \sum_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i,$$

so dass  $\varepsilon_i\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_i$  gilt.

Insbesondere stehen die zentral primitiven Idempotentzerlegungen von  $\varepsilon$  in bijektiver Korrespondenz zu den Zerlegungen in direkte Summen von  ${}_{\mathfrak{A}}\varepsilon\mathfrak{A}$ .  $\square$

**1.2.16 Definition und Bemerkung** (vgl. [Alp93, Sec. 13])

- (a) Die zentral primitiven Idempotente  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s\}$  aus Bemerkung 1.2.14 heißen die **Blockidempotente von  $\mathfrak{A}$** . Die unzerlegbaren zweiseitigen Ideale  $\mathbb{B}_i := \varepsilon_i \mathfrak{A} \varepsilon_i$  heißen die **Blöcke von  $\mathfrak{A}$**  für  $1 \leq i \leq s$ .
- (b) Es sei  $M$  ein unzerlegbarer  $\mathfrak{A}$ -Modul. Dann gibt es genau einen Block  $\mathbb{B}_i$  von  $\mathfrak{A}$  mit  $M \cdot \mathbb{B}_i = M$ . Wir sagen dann, dass  $M$  **zu  $\mathbb{B}_i$  gehört** oder **in  $\mathbb{B}_i$  liegt**. Insbesondere gehört jeder PIM zu genau einem Block.  $\square$

Für einen Körper  $K$  und eine Gruppe  $G$  lassen sich die zentral primitiven Idempotente mit Hilfe der gewöhnlichen Charaktertafel genau bestimmen.

**1.2.17 Satz** (vgl. [CR81, Prop. (9.21)])

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $K$  ein Zerfällungskörper von  $KG$  mit  $\text{char}(K) = 0$ . Weiterhin sei  $\text{Irr}_K(G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ . Dann korrespondiert jedes zentral primitive Idempotent von  $KG$  zu einem irreduziblen Charakter und ist gegeben durch

$$e_{\chi_i} = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{x \in G} \chi_i(x^{-1})x$$

für  $1 \leq i \leq n$ .  $\square$

## 1.3 Modulare Systeme

Es sei  $p$  eine Primzahl. Wir setzen ein  $p$ -modulares System  $(K, \mathcal{O}, k)$  als gegeben voraus. Das maximale Ideal  $\mathfrak{p}$  von  $\mathcal{O}$  sei von  $\pi$  erzeugt. Weil  $\mathcal{O}$  ein lokaler Ring ist, gilt zudem  $\pi \mathcal{O} = J(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \pi$ . Weiter sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{O}$ -Ordnung. Damit ist  $\mathfrak{A} \cong \mathcal{O}^m$  als  $\mathcal{O}$ -Modul für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Geben wir  $\mathfrak{A}$  eine von  $\mathcal{O}$  geerbte Produktmetrik, so ist  $\mathfrak{A}$  ein vollständiger ultrametrischer Raum. Beachte, dass  $\mathcal{O}$  insbesondere ein Hauptidealring ist. Deswegen ist jeder Untermodul eines  $\mathfrak{A}$ -Gitters wieder ein  $\mathfrak{A}$ -Gitter.

Wir setzen  $\mathfrak{A}^K := \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}} K$ , die Konstantenerweiterung von  $\mathfrak{A}$  mit  $K$ , und  $\overline{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{p}$  und nehmen an, dass  $\mathfrak{A}^K$  halbeinfach ist. Dann ist  $\overline{\mathfrak{A}}$  eine endlichdimensionale  $k$ -Algebra mit  $\dim_k(\overline{\mathfrak{A}}) = \text{rang}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{A})$  und es ist  $\overline{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}} k$ . Außerdem gilt  $\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A}) \cong \overline{\mathfrak{A}}/J(\overline{\mathfrak{A}})$  und  $J(\overline{\mathfrak{A}})$  ist nilpotent, so dass es ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $J(\overline{\mathfrak{A}})^l \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{p}$  gibt.

Umgekehrt ist  $\mathfrak{A}\pi \subseteq J(\mathfrak{A})$ : Es sei  $S$  ein einfacher  $\mathfrak{A}$ -Modul, also insbesondere ein endlich erzeugter  $\mathcal{O}$ -Modul. Mit dem Lemma von Nakayama ([Lan83, Cor. I 3.9]) gilt daher

$$S\pi \leq SJ(\mathcal{O}) \not\subseteq S.$$

Andererseits gilt  $(S\pi)\mathfrak{A} = S(\mathfrak{A}\pi) = (S\mathfrak{A})\pi = S\pi \not\subseteq S$ . Daher ist  $S\pi = 0$ . Damit annulliert  $\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}$  jeden einfachen Modul und ist eine Teilmenge von  $J(\mathfrak{A})$ .

Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir folgende Notation festhalten. Es seien  $\overline{1} = \sum_{i=1}^t \overline{\mathbf{e}}_i$  eine primitive Idempotenzzerlegung in  $\overline{\mathfrak{A}}$  und  $1 = \sum_{i=1}^t \mathbf{e}_i$  ein Lift

davon nach  $\mathfrak{A}$  (vergleiche [Lan83, Thm. I.11.2]). Wir setzen  $P_i := \epsilon_i \mathfrak{A}$  und  $\overline{P}_i := \overline{\epsilon}_i \overline{\mathfrak{A}}$  für  $1 \leq i \leq t$ . Dann gilt  $\overline{P}_i \cong P_i / P_i \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{i=1}^t P_i$  und  $P_i$  ist ein PIM von  $\mathfrak{A}$  für  $1 \leq i \leq t$ . Dann haben wir genau wie in Satz 1.2.8:

**1.3.1 Korollar (vgl. [Lan83, Cor. I.11.5, Cor. I.11.6])**

(a) Es ist  $\overline{P}_i$  genau dann zu  $\overline{P}_j$  isomorph, wenn  $P_i$  zu  $P_j$  isomorph ist. In diesem Fall sind  $\overline{\epsilon}_i$  und  $\overline{\epsilon}_j$  in  $\overline{\mathfrak{A}}$  sowie  $\epsilon_i$  und  $\epsilon_j$  in  $\mathfrak{A}$  assoziiert.

(b) Ist  $\{P_1, P_2, \dots, P_t\}$  ein Repräsentantensystem der PIMs von  $\mathfrak{A}$ , dann ist die Menge  $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_t\}$  ein Repräsentantensystem der PIMs von  $\overline{\mathfrak{A}}$ .  $\square$

**1.3.2 Lemma (vgl. [Lan83, Prop. I.12.2])**

Es sei  $\overline{\epsilon}$  ein zentral primitives Idempotent von  $\overline{\mathfrak{A}}$ . Dann ist der Lift  $\epsilon$  von  $\overline{\epsilon}$  nach  $\mathfrak{A}$  ebenfalls zentral. Insbesondere ist  $\epsilon$  eindeutig bestimmt.  $\square$

**1.3.3 Bemerkung**

Es seien  $\overline{\mathbb{B}}_1, \overline{\mathbb{B}}_2, \dots, \overline{\mathbb{B}}_r$  die Blöcke von  $\overline{\mathfrak{A}}$ . Bezeichnen  $\overline{\epsilon}_i \in \overline{\mathbb{B}}_i$  für  $1 \leq i \leq r$  die jeweiligen Einheiten, so ist

$$\sum_{i=1}^r \overline{\epsilon}_i = \overline{1}$$

eine zentral primitive Idempotentzerlegung. Nach Lemma 1.3.2 ist dann  $1 = \sum_{i=1}^r \epsilon_i$  eine zentral primitive Idempotentzerlegung in  $\mathfrak{A}$ , wenn  $\epsilon_i$  Lifts von  $\overline{\epsilon}_i$  für  $1 \leq i \leq r$  bezeichnen. Wir setzen nun  $\mathbb{B}_i := \epsilon_i \mathfrak{A}$  für  $1 \leq i \leq r$  und erhalten  $\overline{\mathbb{B}}_i = \mathbb{B}_i / \mathbb{B}_i \mathfrak{p}$  und

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{B}_i.$$

Es ist zwar  $\epsilon_i \in Z(\mathfrak{A}^K)$ , aber  $\epsilon_i$  ist im Allgemeinen nicht primitiv. Daher finden wir zentral primitive Idempotenten  $\epsilon_{ij}^K$  für  $1 \leq i \leq r$  und  $1 \leq j \leq n_i$  mit  $\epsilon_i = \sum_{j=1}^{n_i} \epsilon_{ij}^K$ . Insgesamt haben wir also die Zerlegung  $\epsilon_i \mathfrak{A}^K = \bigoplus_{j=1}^{n_i} \epsilon_{ij}^K \mathfrak{A}^K$  und jeder Summand  $\epsilon_{ij}^K \mathfrak{A}^K$  ist eine Wedderburn-Komponente von  $\mathfrak{A}^K$ .

**1.3.4 Definition ( $\mathcal{O}$ -Form)**

Es sei  $M$  ein  $\mathfrak{A}^K$ -Modul. Eine  $\mathcal{O}$ -Form von  $M$  ist ein  $\mathfrak{A}$ -Gitter  $X$  mit

$$M \cong X \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

**1.3.5 Lemma (vgl. [NT89, Thm. I.1.6.])**

Es sei  $M$  ein  $\mathfrak{A}^K$ -Modul. Dann gibt es eine  $\mathcal{O}$ -Form  $X$  von  $M$  und für jede solche gilt  $\text{rang}_{\mathcal{O}}(X) = \dim_K(M)$ .  $\square$

Ist  $M$  ein  $\mathfrak{A}^K$ -Modul mit  $\mathcal{O}$ -Form  $X$ , so kann man den  $\overline{\mathfrak{A}}$ -Modul  $\overline{X} := X/X\mathfrak{p}$  betrachten. Im Allgemeinen sind  $\mathcal{O}$ -Formen jedoch nicht eindeutig, nicht einmal bis auf Isomorphie. Trotzdem haben wir die folgende Aussage.

**1.3.6 Lemma** (vgl. [NT89, Thm. I.1.9])

Es seien  $M$  ein  $\mathfrak{A}^K$ -Modul mit  $\mathcal{O}$ -Formen  $X, Y$ . Dann haben  $\overline{X}$  und  $\overline{Y}$  die gleichen Kompositionsfaktoren mit den gleichen jeweiligen Vielfachheiten.  $\square$

**1.3.7 Definition** (liftbar)

Ein  $\overline{\mathfrak{A}}$ -Modul  $M$  heißt **liftbar**, falls ein  $\mathfrak{A}$ -Gitter  $X$  mit  $\overline{X} \cong M$  existiert.

**1.3.8 Lemma** (vgl. [Lan83, Thm. I.14.4])

Es sei  $M$  ein projektiver  $\overline{\mathfrak{A}}$ -Modul. Dann ist  $M$  liftbar zu einem projektiven  $\mathfrak{A}$ -Gitter  $X$ . In diesem Fall ist  $X$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.  $\square$

**1.3.9 Lemma** (vgl. [Lan83, La. I.14.5, La. I.14.7])

Es seien  $M_1, M_2$   $\mathfrak{A}$ -Gitter. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M_1, M_2) / \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M_1, M_2)\pi \subseteq \mathrm{Hom}_{\overline{\mathfrak{A}}}(\overline{M}_1, \overline{M}_2).$$

Ist  $\overline{M}_1$  projektiv, dann gilt Gleichheit.

Ist  $\mathfrak{A}$  eine Gruppenalgebra, so lassen sich die Aussagen weiter spezifizieren.

**1.3.10 Lemma** (vgl. [Lan83, Thm. II.12.4])

Es seien  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$  und  $M = \mathcal{O}_H^G$  der Permutationsmodul von  $G$  auf den Nebenklassen von  $H$  in  $G$ . Dann gelten:

- (a) Der Endomorphismenring von  $\overline{M} \cong k_H^G$  ist liftbar, es gilt also

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_G}(M) / \mathrm{End}_{\mathcal{O}_G}(M)\pi \cong \mathrm{End}_{kG}(\overline{M}).$$

- (b) Jeder (unzerlegbare) direkte Summand von  $k_H^G$  ist liftbar zu einem (unzerlegbaren) direkten Summanden von  $\mathcal{O}_H^G$ .

- (c) Sind  $M_1, M_2$  beliebige direkte Summanden von (möglicherweise verschiedenen)  $\mathcal{O}_G$ -Permutationsmoduln und  $\overline{M}_i := M_i / M_i\pi$  für  $i = 1, 2$ , so ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(M_1, M_2) / \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(M_1, M_2)\pi \cong \mathrm{Hom}_{kG}(\overline{M}_1, \overline{M}_2).$$

Das heißt  $kG$ -Homomorphismen zwischen direkten Summanden von  $kG$ -Permutationsmoduln sind liftbar.  $\square$

In dem vorhergehenden Lemma wurde die Liftbarkeit genau derjenigen Strukturen erfasst, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen.

Wir haben jetzt alle nötigen Definitionen gesammelt, so dass wir den Begriff der Zerlegungszahlen und -matrizen einführen können. Wir halten für den Rest des Abschnitts folgende Notation fest:

Es sei  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  ein vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der einfachen  $\mathfrak{A}^K$ -Moduln und  $X_i$  sei eine  $\mathcal{O}$ -Form von  $S_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Entsprechend seien  $\{M_1, M_2, \dots, M_l\}$  ein vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der einfachen  $\overline{\mathfrak{A}}$ -Moduln und  $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_l\}$  ein vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der PIMs von  $\overline{\mathfrak{A}}$ . Dabei sei die Nummerierung so gewählt, dass  $\overline{P}_i / \overline{P}_i J(\overline{\mathfrak{A}}) \cong M_i$  für alle  $1 \leq i \leq l$  gelte. Weiter sei  $P_i$  der Lift von  $\overline{P}_i$  nach  $\mathfrak{A}$  für  $1 \leq i \leq l$ .

### 1.3.11 Definition (Zerlegungsmatrix einer Algebra)

Die Bezeichnungen seien wie oben.

- (a) Dann ist die **Zerlegungszahl**  $d_{ij}$ , für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq l$  definiert als die Vielfachheit von  $M_j$  als Kompositionsfaktor in  $\overline{X}_i$ . Die Matrix  $D := [d_{ij}]$  heißt **Zerlegungsmatrix von  $\mathfrak{A}$** .
- (b) Da  $d_{ij} = 0$  ist, falls  $M_j$  und  $S_i$  nicht zum gleichen Block gehören, können wir für jeden Block  $\mathbb{B}_s$ ,  $1 \leq s \leq r$  die zugehörige **Zerlegungsmatrix**  $[d_{s_i s_j}]$  **von  $\mathbb{B}_s$**  definieren, wobei  $M_{s_j}$  die einfachen  $\overline{\mathfrak{A}}$ -Moduln von  $\mathbb{B}_s$  und  $S_{s_i}$  die einfachen  $\mathfrak{A}^K$ -Moduln von  $\mathbb{B}_s$  durchlaufen.
- (c) Im speziellen Fall  $\mathfrak{A} = \mathcal{O}G$  für eine Gruppe  $G$  nennen wir  $[d_{ij}]$  die **Zerlegungsmatrix von  $G$** .

Beachte, dass nach Lemma 1.3.6 die Zerlegungszahlen wohldefiniert sind, jedoch von  $\mathcal{O}$  abhängen.

### 1.3.12 Satz (Brauer-Reziprozität)

Die Bezeichnungen seien wie oben. Zusätzlich seien  $K$  ein Zerfällungskörper von  $\mathfrak{A}^K$  und  $k$  ein Zerfällungskörper von  $\overline{\mathfrak{A}}$ .

- (a) Es ist  $P_j \otimes_{\mathcal{O}} K \cong \bigoplus_{i=1}^n d_{ij} S_i$ , d.h.  $d_{ij}$  ist gleich der Vielfachheit von  $S_i$  in  $P_j \otimes_{\mathcal{O}} K$ .
- (b) Für die Cartan-Matrix  $C$  von  $\mathfrak{A}$  gilt:  $C = D^{tr} D$ . Insbesondere ist  $C$  symmetrisch.

**Beweis:** Vergleiche [Lan83, La. I.15.4, Thm. I.15.5]. □

## 1.4 Zerlegungsmatrizen von Gittern

Es seien  $p$  eine Primzahl und  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares System. Das eindeutige maximale Ideal  $\mathfrak{p}$  von  $\mathcal{O}$  sei von  $\pi$  erzeugt. Weiter seien  $\mathfrak{A}$  eine endlich erzeugte  $\mathcal{O}$ -Ordnung und  $W$  ein  $\mathfrak{A}$ -Gitter. Dann ist auch  $\text{End}_{\mathfrak{A}}(W)$  eine endlich erzeugte  $\mathcal{O}$ -Ordnung.

Wie bisher seien  $W^K := W \otimes_{\mathcal{O}} K$  die Konstantenerweiterung und  $\overline{W} := W/W\pi \cong W \otimes_{\mathcal{O}} k$  die Reduktion von  $W$  modulo  $\mathfrak{p}$ . Wir nehmen zudem an, dass  $\mathfrak{A}^K$  halbeinfach und zerfallend über  $K$  ist. Beachte, dass unter den gegebenen Voraussetzungen der Satz von Krull-Schmidt gültig ist.

### 1.4.1 Definition (Zerlegungsmatrix eines Gitters)

Es seien  $\{W_1, W_2, \dots, W_s\}$  ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der unzerlegbaren direkten Summanden von  $W$  und  $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$  ein Repräsentantensystem der einfachen  $\mathfrak{A}^K$ -Moduln, die in  $W^K$  vorkommen. Weiter sei

$$\tilde{d}_{ij} := [S_i, W_j^K]_{\mathfrak{A}^K}$$

die Vielfachheit von  $S_i$  in  $W_j^K$ . Dann heißt die Matrix  $D_W := [\tilde{d}_{ij}]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s}$  die **Zerlegungsmatrix von  $W$** .

Wegen des Satzes von Krull-Schmidt ist die Zerlegungsmatrix bis auf Zeilen- und Spaltenvertauschungen eindeutig bestimmt.

### 1.4.2 Bemerkung

(a) Spezifizieren wir in der obigen Situation  $W := \mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}$ , so ist  $\{\overline{W}_1, \overline{W}_2, \dots, \overline{W}_s\}$  nach Korollar 1.3.1 ein Repräsentantensystem der PIMs von  $\overline{\mathfrak{A}}$ . Den zu  $W_i$  korrespondierenden einfachen  $\overline{\mathfrak{A}}$ -Modul  $\overline{W}_i/\overline{W}_i J(\overline{\mathfrak{A}})$  bezeichnen wir mit  $M_i$  für  $1 \leq i \leq s$ . Schließlich seien  $X_1, X_2, \dots, X_t$   $\mathcal{O}$ -Formen von  $S_i$  mit  $X_i \subseteq S_i$ .

In dieser Situation ist  $\tilde{d}_{ij}$  die Vielfachheit von  $S_i$  in  $W_j^K$ , was nach der Brauer-Reziprozität (Satz 1.3.12) gleich der Vielfachheit von  $M_j$  in  $\overline{X}_i$  ist. Daher stimmen die Definitionen von Zerlegungszahlen in diesem Abschnitt und die von Brauer aus Abschnitt 1.3 überein.

(b) Es sei  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathfrak{A}}(W)$ . Dann ist mit der Fitting-Korrespondenz (Satz 1.2.5)  $\{\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(W, W_j) : 1 \leq j \leq s\}$  ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der PIMs von  $\mathfrak{E}$ .

Wir wenden die Fitting-Korrespondenz auf  $\mathfrak{E}^K = \text{End}_{\mathfrak{A}^K}(W^K)$  an und erhalten  $\{\text{Hom}_{\mathfrak{A}^K}(W^K, S_i) : 1 \leq i \leq t\}$  als Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der einfachen  $\mathfrak{E}^K$ -Moduln.

Weil  $\mathfrak{E}^K$  halbeinfach ist, zeigt die Fitting-Korrespondenz, dass die Zerlegungsmatrix  $[\tilde{d}_{ij}]$  des Gitters  $W$  (im Sinne von Definition 1.4.1) und die Zerlegungsmatrix  $[d_{ij}]$  des Endomorphismenrings  $\mathfrak{E}$  (im Sinne von Brauer, Definition 1.3.11) gleich sind. Eine ausführliche Analyse bietet in diesem Zusammenhang L. L. Scott in [Sco73].

## 1.5 Symmetrische Algebren

Es seien  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{R}$ -Ordnung.

### 1.5.1 Definition und Bemerkung (duale Basis)

Es sei  $\beta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{R}$  eine bilineare Abbildung. Dann heißt  $\beta$  **nicht ausgearbeitet**, falls für eine (beliebige)  $\mathcal{R}$ -Basis  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n\}$  die Determinante der zugehörigen Gram-Matrix  $[\beta(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$  eine Einheit in  $\mathcal{R}$  ist. In diesem Fall gibt es eine eindeutig bestimmte  $\mathcal{R}$ -Basis  $\mathcal{B}^\vee = \{\mathfrak{b}_1^\vee, \mathfrak{b}_2^\vee, \dots, \mathfrak{b}_n^\vee\}$  von  $\mathfrak{A}$ , die

$$\beta(\mathfrak{b}_i^\vee, \mathfrak{b}_j) = \delta_{ij}$$

für alle  $1 \leq i, j \leq n$  erfüllt. Diese heißt die **zu  $\mathcal{B}$  duale Basis**.

### 1.5.2 Definition (Spurform, symmetrische Algebra)

Eine **Spurform auf  $\mathfrak{A}$**  ist eine  $\mathcal{R}$ -lineare Abbildung  $\tau : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{R}$ , die  $\tau(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = \tau(\mathfrak{a}'\mathfrak{a})$  für alle  $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in \mathfrak{A}$  erfüllt. Die Algebra  $\mathfrak{A}$  heißt **symmetrisch**, falls eine

Spurform  $\tau$  existiert, so dass die bilineare Abbildung

$$\beta_\tau : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{R}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \mapsto \tau(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')$$

nicht ausgeartet ist. In diesem Fall sagen wir auch, dass  $\mathfrak{A}$  **symmetrisch bzgl.**  $\tau$  ist.

### 1.5.3 Lemma (vgl. [CR81, Prop. (9.8)])

Es sei  $\mathcal{R} = K$  ein Körper. Jede endlich-dimensionale halbeinfache  $K$ -Algebra ist symmetrisch.  $\square$

### 1.5.4 Lemma

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische  $\mathcal{R}$ -Algebra mit symmetrisierender Spurabbildung  $\tau$  und zugehöriger bilinearer Abbildung  $\beta_\tau$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} &\longrightarrow (\mathfrak{A}\mathfrak{A})^* := \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathcal{R}) \\ \mathfrak{a} &\mapsto (\mathfrak{b} \mapsto \tau(\mathfrak{a}\mathfrak{b})) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$ -Moduln. Dabei ist für einen Homomorphismus  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathcal{R})$  das Urbild von  $\varphi$  unter dem Isomorphismus gegeben durch

$$z_\varphi := \sum_{i=1}^n \varphi(\mathfrak{b}_i) \mathfrak{b}_i^\vee,$$

wobei  $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n\}$  eine Basis von  $\mathfrak{A}$  und  $\{\mathfrak{b}_1^\vee, \mathfrak{b}_2^\vee, \dots, \mathfrak{b}_n^\vee\}$  die dazu gehörige duale Basis ist.

**Beweis:** Wegen

$$\psi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{b}') = \tau(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}') = \psi(\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\mathfrak{b}')$$

ist  $\psi$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$ -Moduln. Es sei  $\mathfrak{a} := \sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{b}_i$  ein Element des Kerns von  $\psi$ . Dann gilt insbesondere

$$0 = \psi(\mathfrak{a})(\mathfrak{b}_i^\vee) = \tau(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i^\vee) = a_i$$

für alle  $1 \leq i \leq n$ . Also folgt  $\mathfrak{a} = 0$ . Es sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathcal{R})$  beliebig. Dann ist  $\varphi$  durch die Angabe der Bilder der Basiselemente  $\varphi(\mathfrak{b}_1), \varphi(\mathfrak{b}_2), \dots, \varphi(\mathfrak{b}_n)$  eindeutig bestimmt. Wegen  $\psi(z_\varphi)(\mathfrak{b}_i) = \varphi(\mathfrak{b}_i)$  für alle  $1 \leq i \leq n$  folgt die Surjektivität von  $\psi$ .  $\square$

### 1.5.5 Bemerkung

Die letzte Aussage kann man sogar noch verschärfen und daraus eine Charakterisierung von symmetrischen Algebren machen. Eine  $\mathcal{R}$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $\mathfrak{A}$  als  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ -Bimodul isomorph zu seinem dualen Modul  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathfrak{A}, \mathcal{R})$  ist (vergleiche dazu [CR81, La. (9.7)]).  $\square$

## 1.6 Das Schur-Element

Die Spurformen von symmetrischen Algebren liefern geeignete Mittel, um die  $\mathfrak{A}$ -Moduln näher zu untersuchen. Einige werden in diesem Abschnitt vorgestellt. Die folgenden Definitionen und Ergebnisse werden in [GP00] ausführlich hergeleitet und bewiesen. Mit Hilfe des so genannten Schur-Elements können nämlich bei symmetrischen Algebren über einem Körper  $K$  projektiv einfache Moduln charakterisiert werden.

### 1.6.1 Definition

Es seien  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische  $\mathcal{R}$ -Ordnung. Wir fixieren  $\mathfrak{A}$ -Moduln  $M, M'$  und eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathfrak{A}$  mit dualer Basis  $\mathcal{B}^\vee$ . Für eine Abbildung  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(M, M')$  definieren wir  $I(\varphi)$  durch

$$I(\varphi)(m) := \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \varphi(m\mathfrak{b})\mathfrak{b}^\vee \quad (m \in M).$$

### 1.6.2 Bemerkung

Sind  $M''$  ein weiterer  $\mathfrak{A}$ -Modul und  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M')$ ,  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(M', M'')$  sowie  $\pi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(M'', M)$ , so gilt

$$I(\psi \circ \varphi) = I(\psi) \circ \varphi \quad \text{und} \quad I(\varphi \circ \pi) = \varphi \circ I(\pi).$$

**Beweis:** Es sei  $m \in M$  beliebig. Dann gilt

$$(I(\psi) \circ \varphi)(m) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \psi(\varphi(m)\mathfrak{b})\mathfrak{b}^\vee = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \psi(\varphi(m\mathfrak{b}))\mathfrak{b}^\vee = I(\psi \circ \varphi)(m).$$

Analog zeigt man die zweite Aussage. □

### 1.6.3 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 1.6.1. Dann ist  $I(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M')$  und unabhängig von der Wahl der Basis  $\mathcal{B}$ .

**Beweis:** Vergleiche [GP00, La. 7.1.10.]. □

Wir nehmen ab jetzt an, dass  $\mathfrak{A}$  eine endlich-dimensionale symmetrische  $K$ -Algebra über einem Körper  $K$  mit Spurform  $\tau$  ist. Zudem fixieren wir eine Basis  $\mathcal{B}$  und die dazu duale Basis  $\mathcal{B}^\vee$ .

### 1.6.4 Satz ([GP00, Thm. 7.2.1.])

Es sei  $S$  ein einfacher  $\mathfrak{A}$ -Modul, der über  $K$  zerfällt. Dann existiert ein eindeutiges Element  $c_S \in K$ , so dass für alle  $\varphi \in \text{End}_K(S)$

$$I(\varphi) = c_S \text{Tr}(\varphi) \text{id}_S$$

gilt, wobei  $\text{Tr}(\varphi)$  die Spur des Endomorphismus  $\varphi$  bezeichnet. Darüberhinaus hängt  $c_S$  nur von der Isomorphieklasse von  $S$  ab. □

### 1.6.5 Definition (Schur-Element)

Das Element  $c_S$  aus Satz 1.6.4 heißt das **Schur-Element von  $S$** .

### 1.6.6 Proposition

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine endlich-dimensionale  $K$ -Algebra. Zusätzlich sei  $S$  ein einfacher und über  $K$  zerfallender  $\mathfrak{A}$ -Modul. Dann ist das Schur-Element  $c_S$  von  $S$  genau dann von 0 verschieden, wenn  $S$  projektiv ist.

Ist  $\mathfrak{A}$  sogar halbeinfach und zerfallend über  $K$ , dann ist  $c_S \neq 0$  und das zu  $S$  gehörige zentral primitive Idempotent  $\varepsilon_S$  hat die Form

$$\varepsilon_S = \frac{1}{c_S} \sum_{i=1}^n \chi_S(\mathfrak{b}_i) \mathfrak{b}_i^\vee = \frac{1}{c_S} \sum_{i=1}^n \chi_S(\mathfrak{b}_i^\vee) \mathfrak{b}_i,$$

wobei der Charakter  $\chi_S$  zu  $S$  gehört. Hierbei sind  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$  und  $\mathfrak{b}_1^\vee, \mathfrak{b}_2^\vee, \dots, \mathfrak{b}_n^\vee$  zueinander duale Basen bezüglich einer symmetrischen Bilinearform gemäß Lemma 1.5.3.

**Beweis:** Dies folgt aus [GP00, Thm. 7.2.6, Prop. 7.2.7].  $\square$

Dieses Ergebnis wurde von P. Fleischmann auf Algebren über  $p$ -modularen Systemen verallgemeinert.

Fixieren wir zunächst folgende Voraussetzungen:

Es seien  $\mathcal{O}$  ein nicht notwendig vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p}$ , Quotientenkörper  $K$  und Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Weiterhin sei  $\mathfrak{A}$  eine endlich erzeugte, symmetrische  $\mathcal{O}$ -Algebra bzgl. der Spurform  $\tau$ , so dass  $\mathfrak{A}^K := K \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}$  über  $K$  zerfällt.

Beachte, dass  $\mathfrak{A}^K$  ebenfalls symmetrisch ist, aber nicht als halbeinfach vorausgesetzt wird.

Für einen  $\mathfrak{A}^K$ -Modul  $M^K$  sei der Modul  $M$  eine  $\mathcal{O}$ -Form von  $M^K$  und  $\overline{M}$  durch  $\overline{M} := M/\pi M \cong M \otimes_{\mathcal{O}} k$  definiert. Für  $\chi \in \text{Irr}_K(\mathfrak{A}^K)$  bezeichnen wir einen zu  $\chi$  gehörigen einfachen  $\mathfrak{A}^K$ -Modul mit  $M_\chi^K$ .

### 1.6.7 Satz ([Fle90])

Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie gerade erläutert. Dann ist  $z_\chi := \sum_{i=1}^n \chi(\mathfrak{b}_i) \mathfrak{b}_i^\vee \in Z(\mathfrak{A})$  für alle  $\chi \in \text{Irr}_K(\mathfrak{A}^K)$  und es gilt  $z_\chi^2 = \tilde{c}_\chi z_\chi$  für ein  $\tilde{c}_\chi \in \mathcal{O}$ . Die Menge

$$P_K := \{M_\chi^K : \chi \in \text{Irr}_K(\mathfrak{A}^K), \tilde{c}_\chi \neq 0\}$$

bildet ein vollständiges Vertretersystem der Isomorphieklassen der projektiv einfachen  $\mathfrak{A}^K$ -Moduln und die Menge

$$P_k := \{\overline{M}_\chi : \chi \in \text{Irr}_K(\mathfrak{A}^K), \tilde{c}_\chi \notin \pi\mathcal{O}\}$$

bildet ein vollständiges Vertretersystem der Isomorphieklassen der projektiv einfachen  $\mathfrak{A}^k$ -Moduln. Alle diese Moduln sind absolut irreduzibel.  $\square$

## 1.7 Permutationsmoduln

In diesem Abschnitt fixieren wir einen kommutativen Ring  $\mathcal{R}$  und eine Gruppe  $G$ .

### 1.7.1 Definition (Permutationsmodul)

Es sei  $\Omega$  eine endliche Menge, auf der  $G$  operiert. Es sei  $\mathcal{R}\Omega$  der  $\mathcal{R}$ -freie Modul mit Basis  $\{m_\omega : \omega \in \Omega\}$ . Dann wird  $\mathcal{R}\Omega$  via

$$\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}\Omega), g \mapsto (\varphi(g) : \mathcal{R}\Omega \rightarrow \mathcal{R}\Omega, m_\omega \mapsto m_{\omega g})$$

zu einem ( $\mathcal{R}G$ -)Permutationsmodul. (Die Abbildung  $\varphi$  ist also ein Anti-Homomorphismus von Gruppen.) Außerdem induziert  $\varphi$  eine **Permutationsdarstellung**  $\mathbf{P} : G \rightarrow GL_{|\Omega|}(\mathcal{R})$  von  $\mathcal{R}G$  mit

$$\mathbf{P}(g)_{\omega, \omega'} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega' = \omega g \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Darstellung heißt **transitiv**, falls  $G$  auf  $\Omega$  transitiv operiert.

### 1.7.2 Bemerkung

Es sei  $\Omega$  eine endliche Menge, auf der  $G$  operiert.

- (a) Bezeichnet  $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}$  die Menge der Bahnen unter der Operation von  $G$ , so zerfällt der Permutationsmodul  $\mathcal{R}\Omega$  als  $\mathcal{R}G$ -Modul in die direkten Summanden

$$\mathcal{R}\Omega = \mathcal{R}\Omega_1 \oplus \mathcal{R}\Omega_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}\Omega_m.$$

- (b) Es operiere  $G$  transitiv auf  $\Omega$ . Dann ist für  $\omega_0 \in \Omega$  der **Stabilisator von  $\omega_0$**

$$G_{\omega_0} := \{\omega \in \Omega : \omega_0 g = \omega_0\} =: H$$

eine Untergruppe von  $G$ . Der zugehörige Permutationsmodul ist isomorph zu  $\mathcal{R}_H^G$ . Dieser Modul ist auch isomorph zu dem Ideal von  $\mathcal{R}G$ , das von dem Element  $\sum_{h \in H} h$  erzeugt wird.

Eine ausführliche Behandlung und Charakterisierung von Permutationsmoduln findet man beispielsweise in [Lan83] und [Sco73].

### Beweis:

- (a) Es ist klar, dass die Summanden  $\mathcal{R}G$ -Moduln sind.
- (b) Für  $1 \leq i \leq m$  sei  $g_i \in G$  mit  $\omega_0 g_i = \omega_i$ . Dann ist  $\{H g_i : 1 \leq i \leq m\}$  die Menge der Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$  und es gilt  $H g_i g = H g_j$  genau dann, wenn  $\omega_i g = \omega_j$  gilt.

Betrachten wir andererseits den trivialen  $\mathcal{R}H$ -Modul  $\mathcal{R}_H$ , so ist für  $g \in G$  die Operation von  $g$  auf  $\mathcal{R}_H^G$  bzgl. der Basis  $\{1 \otimes_H g_i : 1 \leq i \leq m\}$  identisch mit der von  $g$  auf den Nebenklassen von  $H$  in  $G$ . Analog erhält man die Aussage für den Modul  $\langle \sum_{h \in H} h \rangle_{\mathcal{R}G}$ .  $\square$



## Kapitel 2

# Endomorphismenringe von Permutationsmoduln

Die globale Voraussetzung für das zweite Kapitel sei, wenn nicht an gegebener Stelle anders gesagt, wie folgt.

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ . Zudem seien  $\mathcal{R}$  ein Integritätsbereich und  $K$  ein Körper. In diesem Kapitel werden die Eigenschaften und Strukturen der Endomorphismenringe von Permutationsmoduln untersucht. Viele allgemeine Aussagen aus dem ersten Kapitel werden auf diese spezielle Situation angewendet. So bereitet der erste Abschnitt längst bekannte Aussagen über die gewöhnliche Charaktertafel, Idempotente, Standardbasis, Valenzen und die Schur-Basis, wie sie zum Beispiel im Abschnitt 11 in [CR81] zu finden sind, auf. J. Müller hat in seiner Habilitationsschrift [Mül03] unter anderem so genannte vielfachheitsfreie Permutationsmoduln und ihre Endomorphismenringe untersucht und Charaktertafeln dieser Endomorphismenringe berechnet. Viele Ergebnisse, die wir in diesem Kapitel ausarbeiten, finden sich daher auch in der Arbeit von J. Müller.

Im zweiten Abschnitt werden gruppentheoretische Beziehungen der Untergruppenkette  $H \leq N := N_G(H) \leq G$  untersucht, um strukturelle Zusammenhänge zwischen den Endomorphismenringen  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}_H^G)$  und  $\text{End}_{\mathcal{R}N}(\mathcal{R}_H^N)$  herzustellen. Im dritten und vierten Abschnitt benutzen wir die Ergebnisse aus dem ersten Abschnitt, um die Charaktertafel von Endomorphismenringen der Form  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}_H^G)$  aus der Charaktertafel von  $G$  berechnen zu können. Auch ein Zusammenhang zwischen dem Zentrum von  $\mathcal{R}G$  und dem von  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}_H^G)$  können wir mit Hilfe des ersten Abschnitts finden. Das kondensierte Zentrum der Gruppenalgebra lässt sich nämlich in das Zentrum des Endomorphismenrings einbetten. Die Primteiler der Ordnung des Faktors dieser beiden Strukturen als abelsche Gruppe teilen dann die Ordnung von  $G$ .

Der fünfte und sechste Abschnitt wenden die Theorie über symmetrische Algebren und Schur-Elemente aus dem ersten Kapitel auf den speziellen Fall der Endomorphismenringe von Permutationsmoduln an. In den darauffolgenden Ab-

schnitten wenden wir uns allmählich der modularen Situation zu und zitieren Hanakis Charakterisierung der Halbeinfachheit von Endomorphismenringen von Permutationsmoduln. Die Frage nach der Blockzugehörigkeit der gewöhnlichen Charaktere solcher Endomorphismenringe wird beispielsweise in [Lan83] beantwortet und im achten Abschnitt aufgegriffen.

Auch die letzten beiden Abschnitte spezialisieren Ergebnisse aus dem ersten Kapitel über Zerlegungsmatrizen von Gittern auf Endomorphismenringen von Permutationsmoduln. Mit Hilfe der Fitting-Korrespondenz wird ein Kriterium dafür entwickelt, wann bestimmte gewöhnliche Charaktere des Endomorphismenrings nach Reduktion modulo einer Primzahl projektiv einfach bleiben. Dabei werden wir in den abschließenden Bemerkungen vor allem die Unterschiede zu den Ergebnissen bei Gruppen herausstellen.

## 2.1 Strukturanalyse

### 2.1.1 Definition und Bemerkung ([CR81, Prop. (11.21), Def. (11.22)])

Es sei  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring. Weiterhin seien  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$  eine Untergruppe,  $\mathfrak{e} \in \mathcal{R}H$  ein Idempotent und  $\mathfrak{e}\mathcal{R}H$  der davon erzeugte  $\mathcal{R}H$ -Modul. Dann ist der  $\mathcal{R}G$ -Modul  $\mathfrak{e}\mathcal{R}G$  zum induzierten Modul  $(\mathfrak{e}\mathcal{R}H)^G$  isomorph. Die **Hecke-Algebra**  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathfrak{e}\mathcal{R}H)$  ist die Unteralgebra  $\mathfrak{e}\mathcal{R}G\mathfrak{e}$  von  $\mathcal{R}G$ . Ist  $\mathfrak{e}\mathcal{R}H \cong \mathfrak{e}'\mathcal{R}H$ , so sind auch die zugehörigen Hecke-Algebren isomorph.

Wählen wir in der Parametrisierung von Hecke-Algebren spezielle Idempotenten, so können wir die bisher allgemeinen Strukturaussagen konkretisieren.

### 2.1.2 Bemerkung

Es seien  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$  und  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Ring mit  $|H| \in \mathcal{R}^*$ . Dann ist  $\mathfrak{e}_H := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h$  ein Idempotent von  $\mathcal{R}H$ .

- (a) Es sei  $M$  ein  $\mathcal{R}G$ -Modul. Dann ist die Kondensation  $M\mathfrak{e}_H$  genau die Fixpunktmenge

$$\text{Fix}_H(M) := \{m \in M : mh = m \text{ für alle } h \in H\}$$

unter  $H$ .

- (b) Es ist  $\mathfrak{e}_H\mathcal{R}H$  isomorph zum trivialen  $\mathcal{R}H$ -Modul  $\mathcal{R}_H$ .
- (c) Der reguläre  $\mathfrak{e}_H\mathcal{R}G\mathfrak{e}_H$ -Modul  $\mathfrak{e}_H\mathcal{R}G\mathfrak{e}_H$  ist isomorph zur Kondensation des Permutationsmoduls  $\mathcal{R}_H^G$  auf den Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$ .
- (d) Die Hecke-Algebra  $\mathfrak{H}(G, H, \mathfrak{e}_H\mathcal{R}H) = \mathfrak{e}_H\mathcal{R}G\mathfrak{e}_H$  ist isomorph zur Algebra der  $\mathcal{R}$ -wertigen Funktionen auf  $G$  (mit Faltungsprodukt), die auf den  $(H, H)$ -Doppeln Nebenklassen von  $G$  konstant sind.

**Beweis:**

- (a) Für  $m \in M$  ist  $m \in M\mathfrak{e}_H$  genau dann, wenn  $m\mathfrak{e}_H = m$  ist. Da  $\mathfrak{e}_H \cdot h = \mathfrak{e}_H$  für alle  $h \in H$  gilt, impliziert  $m\mathfrak{e}_H = m$  dann  $mh = m$ . Gilt umgekehrt  $mh = h$  für alle  $h \in H$ , so gilt wegen der Definition von  $\mathfrak{e}_H$  auch  $m\mathfrak{e}_H = m$ .
- (b) Klar.
- (c) Die durch  $\mathfrak{e}_H\mathcal{R}G \rightarrow \mathcal{R}_H^G, \mathfrak{e}_H g \mapsto Hg$  definierte Abbildung ist ein  $\mathcal{R}G$ -Isomorphismus. Somit ist die Kondensation  $\mathfrak{e}_H\mathcal{R}G\mathfrak{e}_H$  von  $\mathfrak{e}_H\mathcal{R}G$  isomorph zur Kondensation von  $\mathcal{R}_H^G$ .
- (d) Klar. □

**2.1.3 Definition**

Die Voraussetzungen seien wie in Bemerkung 2.1.2. Ab jetzt bezeichnen wir für eine Untergruppe  $H \leq G$  mit  $\mathfrak{e}_H$  das Idempotent  $\mathfrak{e}_H := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h$ .

**2.1.4 Bemerkung**

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ . Ist  $\mathfrak{e} \in \mathcal{R}H$  ein Idempotent, so können wir den Endomorphismenring  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathfrak{e}\mathcal{R}G)$  von mehreren Seiten beleuchten. Zum einen wissen wir bereits aus Lemma 1.2.10, dass  $\mathfrak{e}\mathcal{R}G\mathfrak{e}$  als  $\mathcal{R}$ -Algebra zum Endomorphismenring  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathfrak{e}\mathcal{R}G)$  isomorph ist. Zum anderen haben wir das Konzept der Kondensation und die Theorie der Hecke-Algebren. Wir werden, ohne darauf immer hinzuweisen, die unterschiedlichen Sichtweisen oftmals parallel betrachten. So können wir uns die strukturellen Informationen, die die Gruppenalgebra bereits hergibt, zu Nutze machen, um den Endomorphismenring zu untersuchen. Insbesondere können wir die Charaktertheorie, die in [CR81] entwickelt wird, auf unsere Situation anwenden. So gibt es für einen Körper  $K$  der Charakteristik 0 ein enges Zusammenspiel zwischen den gewöhnlichen Charakteren von  $G$  und denjenigen von  $\mathfrak{e}KG\mathfrak{e}$ .

**2.1.5 Lemma (vgl. [CR81, La. (11.23), Cor. (11.24)])**

Es sei ein Idempotent  $\mathfrak{e} \in KH$  gegeben, wobei  $K$  ein Zerfällungskörper der Charakteristik 0 der Gruppe  $G$  und ihrer Untergruppen ist. Dann gilt für die Hecke-Algebra  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathfrak{e}KH)$ :

- (a)  $\mathfrak{H}$  ist eine halbeinfache Algebra (genau wie  $KG$ ).
- (b) Ein Idempotent  $\mathfrak{e}' \in \mathfrak{H}(= \mathfrak{e}KG\mathfrak{e})$  ist genau dann primitiv, wenn es auch in  $KG$  primitiv ist.
- (c) Der Körper  $K$  ist auch Zerfällungskörper von  $\mathfrak{H}$ .

**Beweis:**

- (a) Dies folgt aus [NT89, Thm. I.3.9].

- (b) Nach dem Lemma von Schur ([NT89, Thm. I.5.1]) ist ein Idempotent  $\mathfrak{e}'$  einer halbeinfachen Algebra  $\mathfrak{A}$  genau dann primitiv, wenn  $\mathfrak{e}'\mathfrak{A}\mathfrak{e}'$  ein Schiefkörper ist. Nun ist  $\mathfrak{e}' \in \mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{e}$  ist das Einselement von  $\mathfrak{H}$ , weswegen

$$\mathfrak{e}'KG\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'\mathfrak{e}KG\mathfrak{e}\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'\mathfrak{H}\mathfrak{e}'$$

gilt und die Behauptung folgt.

- (c) Wir zeigen, dass jeder einfache  $\mathfrak{H}$ -Modul absolut einfach ist. Wegen des Lemmas von Schur reicht es zu zeigen, dass  $\mathfrak{e}'\mathfrak{H}\mathfrak{e}' = K\mathfrak{e}'$  für jedes primitive Idempotent  $\mathfrak{e}' \in \mathfrak{H}$ . Das folgt mit (b), weil  $K$  ein Zerfällungskörper für  $KG$  ist.  $\square$

Der folgende Satz gibt genau an, woher die gewöhnlichen Charaktere einer Hecke-Algebra kommen und welche Grade sie haben.

### 2.1.6 Satz (vgl. [CR81, Thm. (11.25)])

Die Bezeichnungen seien wie in Lemma 2.1.5. Zusätzlich sei  $\psi$  der gewöhnliche Charakter von  $KH$ , der zum Modul  $\mathfrak{e}KH$  gehört. Dann gilt:

- (a) Es sei  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Dann ist die Restriktion  $\chi|_{\mathfrak{H}}$  auf  $\mathfrak{H}$  genau dann von 0 verschieden, wenn  $\langle \chi, \psi^G \rangle \neq 0$  gilt, wobei  $\langle \cdot \rangle$  das Skalarprodukt von Charakteren wie auf Seite 3 ist.
- (b) Die Abbildung  $\chi \mapsto \chi|_{\mathfrak{H}}$  ist eine Bijektion von  $\{\chi \in \text{Irr}(G) : \langle \chi, \psi^G \rangle \neq 0\}$  in die Menge der irreduziblen Charaktere von  $\mathfrak{H}$ .
- (c) Ist  $\mu$  ein irreduzibler Charakter von  $\mathfrak{H}$ , der zu  $\chi \in \text{Irr}_K(G)$  nach (b) korrespondiert, so gilt  $\deg(\mu) = \langle \chi, \psi^G \rangle$  für den Grad von  $\mu$ .

Schreibweise:  $\text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G) := \{\chi \in \text{Irr}_K(G) : \langle \chi, \psi^G \rangle \neq 0\}$ .  $\square$

### 2.1.7 Lemma

Es seien  $K$  ein Körper der Charakteristik 0 und  $P \in \text{Syl}_p(G)$  für eine Primzahl  $p$  und nehmen an,  $K$  sei ein Zerfällungskörper für  $kG$ . Wir betrachten das Idempotent  $\mathfrak{e}_P := |P|^{-1} \sum_{x \in P} x$  und die Hecke-Algebra  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, P, \mathfrak{e}_P K P)$ . Ist  $\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)$  sogar ein Defekt-0-Charakter für die Primzahl  $p$ , so ist der Grad des korrespondierenden gewöhnlichen Charakters  $\mu$  von  $\mathfrak{H}$  gleich dem  $p'$ -Anteil von  $\chi(1)$ .

In diesem Fall ist nämlich  $\chi(g) = 0$  für alle Elemente  $g \in G$ , deren Ordnung von  $p$  geteilt wird. Es sei  $\chi(1) = |P| \cdot t$  für eine zu  $p$  teilerfremde natürliche Zahl  $t$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(1) &= \langle 1_P^G, \chi \rangle_G = \langle 1_P, \chi_P \rangle_P \\ &= |P|^{-1} \sum_{g \in P} \chi(g) = |P|^{-1} \chi(1) = |P|^{-1} |P| \cdot t = t. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Wedderburn korrespondiert dieser Charakter dann zu einer Matrix-Algebra der Form  $K^{t \times t}$ .  $\square$

Im letzten Teil dieser Arbeit haben wir einige Charaktertafeln von Endomorphismenringen abgedruckt, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurden. Wir geben dort auch in einer zusätzlichen Spalte die Korrespondenz zwischen den einzelnen gewöhnlichen Charakteren der Hecke-Algebra und den Konstituenten des Permutationscharakters an. Wie die Charaktertafeln genau berechnet werden, wird in Abschnitt 2.3 beschrieben. Wählen wir wie oben das spezielle Idempotent  $\mathbf{e}_H = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h$ , so lässt sich etwa noch folgende strukturelle Eigenschaft aus den Konstituenten des Permutationscharakters ableiten.

**2.1.8 Korollar (vgl. [BI84, Thm. II.1.3])**

Die Bezeichnungen seien wie in Satz 2.1.6. Sei  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathbf{e}_H KH)$ . Dann ist  $\mathfrak{H}$  genau dann kommutativ, wenn jeder Konstituent des Permutationscharakters  $1_H^G$  mit Vielfachheit 1 vorkommt.  $\square$

**2.1.9 Bemerkung**

Die Bezeichnungen seien wie in Satz 2.1.6. Zudem seien  $\chi \in \text{Irr}_K(G) \setminus \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)$  (vergleiche Satz 2.1.6) und  $M_\chi$  ein  $KG$ -Modul mit Charakter  $\chi$ . Dann ist  $M_\chi \mathbf{e} = 0$ .  $\square$

Das folgende Lemma über zentral primitive Idempotenten einer Hecke-Algebra wird in Abschnitt 2.4 über allgemeineren Grundkörpern benötigt, als wir bisher angenommen haben. Wir wollen das schon hier berücksichtigen und die Voraussetzungen entsprechend anpassen. In diesem Sinne ist die Aussage auch eine Verallgemeinerung von [CR81, Cor. (11.26)], wo ein Körper der Charakteristik 0 vorausgesetzt war.

**2.1.10 Lemma (vgl. [CR81, Cor. (11.26)])**

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $F$  ein Körper mit  $\text{char}(F) \nmid |G|$ , so dass  $F$  ein Zerfällungskörper von  $FG$  ist. Zudem seien  $H \leq G$  und  $\mathbf{e}$  ein Idempotent von  $FH$ . Wir bezeichnen die Repräsentanten der einfachen  $FG$ -Moduln mit  $V_1, V_2, \dots, V_l$ . Sie seien so angeordnet, dass  $V_1 \mathbf{e} \neq 0, V_2 \mathbf{e} \neq 0, \dots, V_r \mathbf{e} \neq 0, V_{r+1} \mathbf{e} = 0, \dots, V_l \mathbf{e} = 0$  für ein  $1 \leq r \leq l$  gilt. Die zu  $V_i$  gehörigen zentral primitiven Idempotenten bezeichnen wir mit  $\varepsilon_i$  für  $1 \leq i \leq l$  (vergleiche Satz 1.2.17). Dann ist die Menge der zentral primitiven Idempotenten von  $\mathfrak{H} := \mathbf{e}FG\mathbf{e}$  gegeben durch  $\{\mathbf{e}\varepsilon_i : 1 \leq i \leq r\}$ . Insbesondere gilt

$$Z(\mathbf{e}FG\mathbf{e}) = \langle \mathbf{e}\varepsilon_i : 1 \leq i \leq r \rangle = \mathbf{e}Z(FG)\mathbf{e}.$$

Beachte zudem, dass  $\mathbf{e}\varepsilon_i = 0$  für alle  $r + 1 \leq i \leq l$  gilt.

**Beweis:** Nach Lemma 1.2.13 sind die Moduln  $V_1 \mathbf{e}, V_2 \mathbf{e}, \dots, V_r \mathbf{e}$  Repräsentanten der einfachen  $\mathbf{e}FG\mathbf{e}$ -Moduln. Für  $1 \leq i \leq l$  ist  $\varepsilon_i \mathbf{e} = \mathbf{e}\varepsilon_i \mathbf{e} \in \mathbf{e}Z(FG)\mathbf{e} \subseteq Z(\mathbf{e}FG\mathbf{e})$  und  $\varepsilon_i \mathbf{e}$  ist genau dann ein Idempotent, wenn es von 0 verschieden ist.

Weiter gilt für  $1 \leq i \leq r$ :

$$(V_i \mathbf{e})\mathbf{e}\varepsilon_j = V_i \varepsilon_j \mathbf{e} = \begin{cases} V_i \mathbf{e} & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i. \end{cases}$$

Dabei operiert  $\epsilon \varepsilon_i$  wie die Identität auf  $V_i \epsilon$  für  $1 \leq i \leq r$ . Weil  $FG$  halbeinfach ist, existiert zu jedem  $1 \leq i \leq l$  mit  $\epsilon \varepsilon_i \neq 0$  ein Index  $1 \leq j \leq l$ , so dass  $V_j \epsilon \varepsilon_i \neq 0$  gilt. Nach den vorherigen Überlegungen folgt  $j = i$  und  $1 \leq i \leq r$  und somit  $Z(\epsilon FG \epsilon) = \langle \epsilon \varepsilon_i : 1 \leq i \leq r \rangle \leq \epsilon Z(FG) \epsilon$ .  $\square$

### 2.1.11 Satz (Formel von Ree)

Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 2.1.5 und die Bezeichnungen wie in Satz 2.1.6. Es sei  $\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)$ . Wir fixieren  $x \in G$  und die Konjugiertenklasse  $C$  mit  $x \in C$ . Dann gilt:

$$\chi(x) = |C_G(x)| \chi(\epsilon \hat{C} \epsilon) \left( \sum_{g \in G} \chi(\epsilon g^{-1} \epsilon) \chi(\epsilon g \epsilon) \right)^{-1}, \quad (2.1)$$

wobei  $\hat{C} = \sum_{y \in C} y$  die Klassensumme von  $C$  bezeichnet.

**Beweis:** [CR81, Thm.(11.28)].  $\square$

Rees Formel bietet die Möglichkeit, mit Kenntnis der Charaktertafel von  $\mathfrak{H}$  Teile der Charaktertafel von  $G$  zu berechnen. Dies hat vor allem rechnerische Vorteile, da die Dimension von  $\mathfrak{H}$  in der Regel kleiner als die von  $KG$  ist.

Weil die Überlegungen im Rest des Abschnitts keine Einschränkung an den zugrunde liegenden Ring benötigen, fixieren wir ab hier einen kommutativen Ring  $\mathcal{R}$ . Wir verlassen jetzt den allgemeinen Rahmen der Hecke-Algebren und setzen den Schwerpunkt auf Hecke-Algebren der Form  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}_H^G)$ .

### 2.1.12 Definition (gepaarte Bahn)

Es sei  $\Omega = H \backslash G$  die Menge der Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$ . Dann operiert  $G$  diagonal auf  $\Omega \times \Omega$ . Die Bahnen dieser Operation bezeichnen wir mit  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_d$ , wobei wir die Notation  $\Omega_1 = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega\}$  vereinbaren. Weiterhin sei für  $1 \leq i \leq d$

$$\overline{\Omega}_i = \{(\omega', \omega) : (\omega, \omega') \in \Omega_i\}$$

die zu  $\Omega_i$  **gepaarte Bahn**. Für  $1 \leq i \leq d$  sei dann  $i^* \in \{1, 2, \dots, d\}$ , so dass  $\overline{\Omega}_i = \Omega_{i^*}$  gilt. Schließlich sei für  $1 \leq i \leq d$  und  $\omega \in \Omega$  die Menge  $\Omega_i(\omega)$  definiert durch

$$\Omega_i(\omega) := \{\omega' \in \Omega : (\omega, \omega') \in \Omega_i\}.$$

### 2.1.13 Bemerkung

Es seien  $\{D_i : 1 \leq i \leq d\}$  die Menge der Doppelnebenklassen von  $H$  in  $G$  und  $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_d\}$  ein Repräsentantensystem dieser Doppelnebenklassen.

- (a) Dann ist die Abbildung  $\{\Omega_i : 1 \leq i \leq d\} \rightarrow \{D_i : 1 \leq i \leq d\} : \Omega_i = (Hg, Hg')^G \mapsto Hg'g^{-1}H$  bijektiv. Via dieser Bijektion ist  $\{(H, Hg_i) : 1 \leq i \leq d\}$  ein Repräsentantensystem der Bahnen von  $G$  auf  $\Omega \times \Omega$ . Beachte, dass  $\overline{\Omega}_i = \overline{(H, Hg_i)^G} = (Hg_i, H)^G$  zu  $Hg_i^{-1}H$  korrespondiert.

(b) Für  $1 \leq i \leq d$  und  $\omega = Hg \in \Omega$  gilt

$$\Omega_i(Hg) = \{Hg_i h : h \in [(H \cap H^{g_i}) \setminus H]\}g,$$

wobei  $[(H \cap H^{g_i}) \setminus H]$  eine Transversale von  $H \cap H^{g_i}$  in  $H$  bezeichnet. Insbesondere ist

$$k_i := |\Omega_i(Hg)| = |H : (H \cap H^{g_i})|$$

von  $Hg$  unabhängig und somit wohldefiniert. Zudem gilt  $k_{i^*} = k_i$ .

**Beweis:** (b) Beachte, dass  $\Omega_i(Hg) = \Omega_i(H)g$  gilt. Daher betrachten wir ohne Einschränkung  $\Omega_i(H)$ . In  $\Omega_i$  finden wir alle Elemente der Form  $(Hg, Hg_i g)$  für  $g \in G$ . Also ist  $Hg_i g$  ein Element von  $\Omega_i(H)$ , wenn  $g \in H$  gilt. Aber nicht alle Elemente von  $H$  liefern verschiedene Nebenklassen. Es ist nämlich  $Hg_i g = Hg_i g'$  genau dann, wenn  $g'g^{-1} \in H^{g_i}$  gilt, weswegen wir diese Elemente herausfaktorisieren.  $\square$  Beachte, dass erst die Transitivität der Operation von  $G$  auf  $\Omega$  die Unabhängigkeit der  $k_i$  von  $\omega$  gewährleistet.

#### 2.1.14 Definition (Valenz)

Die Bezeichnungen seien wie in Bemerkung 2.1.13. Dann heißen die Zahlen  $k_i$  für  $1 \leq i \leq d$  die **Valenzen für die Operation von  $G$  auf  $\Omega \times \Omega$** .

#### 2.1.15 Lemma

Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 2.1.13 gilt:

$$k_i = |H|^{-1} |D_i|.$$

Insbesondere ist die Valenz  $k_i$  die Anzahl der Nebenklassen von  $H$  in  $G$  in der Doppelnebenklasse  $D_i$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Bahn von  $H$  auf  $\{Hg_i h : h \in H\}$  unter Rechtsmultiplikation und erhalten mit dem Bahnsatz

$$|Hg_i|^{-1} |D_i| = |H : H_{Hg_i}|.$$

Für den Stabilisator gilt  $H_{Hg_i} = H \cap H^{g_i}$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

#### 2.1.16 Definition und Bemerkung (Adjazenzmatrizen)

Die Bezeichnungen seien wie in Bemerkung 2.1.12. Zudem seien  $\{D_i : 1 \leq i \leq d\}$  die Menge der Doppelnebenklassen von  $H$  in  $G$  und  $\mathcal{R}\Omega$  sei der zugehörige Permutationsmodul über  $\mathcal{R}$ .

Für  $1 \leq i \leq d$  und  $\omega \in \Omega$  sei dann  $\varphi_i \in \text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}\Omega)$  definiert durch

$$\varphi_i(\omega) := \sum_{\omega' \in \Omega_i(\omega)} \omega'.$$

Dann ist offensichtlich  $\varphi_i \in \text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}\Omega)$ . Für  $1 \leq i \leq d$  sei  $A_i$  die Matrix, deren Zeilen und Spalten durch  $\Omega$  induziert sind und deren Einträge gegeben sind durch

$$[A_i]_{\omega, \omega'} = \begin{cases} 1_{\mathcal{R}}, & \text{falls } \omega' \in \Omega_i(\omega) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1_{\mathcal{R}}, & \text{falls } (\omega, \omega') \in \Omega_i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Matrizen sind die Abbildungsmatrizen von  $\varphi_i$  auf  $\mathcal{R}\Omega$  bezüglich der Basis  $\Omega$  und heißen **die Adjazenzmatrizen von  $G$  auf  $\Omega$** .

In Übereinstimmung mit der Rechtsoperation, die die MeatAxe benutzt, haben wir die zugehörigen Abbildungsmatrizen bezüglich der Basis  $\Omega$  in Zeilenkonvention definiert. Man verifiziert leicht, dass  $\varphi_i \circ \varphi_j$  dann zu  $A_j A_i$  korrespondiert.

### 2.1.17 Bemerkung

Die Adjazenzmatrix  $A_i$  hat genau  $k_i = |H|^{-1}|D_i|$  ( $i$ -te Valenz) Einsen in jeder Spalte und Zeile.

### 2.1.18 Lemma (Schur (1933))

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.1.16. Dann bilden die Endomorphismen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$  eine  $\mathcal{R}$ -Basis von  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}\Omega)$ , die so genannte **Schur Basis**.

**Beweis:** Die lineare Unabhängigkeit erkennen wir sofort, wenn wir die Adjazenzmatrizen betrachten, die paarweise disjunkte Träger haben. Auch die  $\mathcal{R}G$ -Linearität ist klar, wenn wir die Gleichheit  $\Omega_i(\omega g) = \Omega_i(\omega)g$  beachten. Es bleibt zu zeigen, dass die Schur-Basis den ganzen Raum aufspannt. Seien also  $\psi \in \text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}\Omega)$  beliebig und  $A_\psi := [a_{\omega, \omega'}]_{\omega, \omega' \in \Omega}$  die zugehörige Abbildungsmatrix. Dann ist für ein beliebiges  $g \in G$  und  $\omega \in \Omega$

$$\psi(\omega)g = \sum_{\omega' \in \Omega} a_{\omega, \omega'} \omega' g$$

und

$$\begin{aligned} \psi(\omega g) &= \sum_{\omega' \in \Omega} a_{\omega g, \omega'} \omega' \\ &= \sum_{\omega'' \in \Omega} a_{\omega g, \omega''} \omega'' g, \end{aligned}$$

wobei wir  $\omega'' = \omega' g^{-1}$  gesetzt haben. Nach Koeffizientenvergleich sehen wir  $a_{\omega, \omega'} = a_{\omega g, \omega' g}$  für alle  $\omega' \in \Omega$ . Damit ist  $A_\psi$  eine  $\mathcal{R}$ -Linearkombination der Adjazenzmatrizen.  $\square$

### 2.1.19 Korollar (vgl. [BI84, Thm. II 1.3])

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.1.16. Zusätzlich sei  $\{\mathbf{P}(g) : g \in G\}$  die Menge der Permutationsdarstellungsmatrizen von  $G$  auf  $\Omega$  (vergleiche Definition 1.7.1).

Dann ist die Menge  $\mathfrak{A}$  aller  $|\Omega| \times |\Omega|$  Matrizen über  $\mathcal{R}$ , die mit allen Permutationsmatrizen  $\mathbf{P}(g)$  für  $g \in G$  kommutieren, eine  $\mathcal{R}$ -Algebra. Diese wird von den Adjazenzmatrizen aufgespannt. Wir nennen  $\mathfrak{A}$  den **Zentralisator-Ring von  $G$  über  $\Omega$** . Insbesondere sind  $\mathfrak{A}$  und  $\text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}\Omega)$  als  $\mathcal{R}$ -Algebren isomorph. Nach Lemma 2.1.18 bilden die Adjazenzmatrizen  $A_1, A_2, \dots, A_d$  eine  $\mathcal{R}$ -Basis von  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

### 2.1.20 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.1.16. Zudem sei  $\Omega$  die Menge der Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$ . Für  $1 \leq i, j, t \leq d$  seien  $p_{ij}^t \in \mathcal{R}$  durch  $\varphi_i \varphi_j = \sum_{1 \leq t \leq d} p_{ij}^t \varphi_t$  definiert. Dann gilt

$$p_{ij}^t = |\Omega_j(Hg) \cap \overline{\Omega}_i(Hg')| \cdot 1_{\mathcal{R}} = |H|^{-1} |D_i \cap g_t D_j^{-1}| \cdot 1_{\mathcal{R}}$$

für ein fest gewähltes Element  $(Hg, Hg') \in \Omega_t$ .

**Beweis:** Es seien  $A_i$  und  $A_j$  die zu  $\varphi_i$  bzw.  $\varphi_j$  gehörigen Adjazenzmatrizen. Wir berechnen den  $(Hg, Hg')$ -Eintrag von  $A_j A_i$  (vergleiche Bemerkung 2.1.16), der durch  $\sum_{Hg'' \in \Omega} [A_j]_{Hg, Hg''} [A_i]_{Hg'', Hg'}$  gegeben ist. Es ist  $[A_j]_{Hg, Hg''} [A_i]_{Hg'', Hg'} = 1$  genau dann, wenn  $(Hg, Hg'') \in \Omega_j$  und  $(Hg'', Hg') \in \Omega_i$  gilt, wenn also  $Hg'' \in \Omega_j(Hg)$  und  $Hg'' \in \overline{\Omega}_i(Hg')$  ist. Daraus folgt die erste Gleichheit.

Es sei  $(H, Hg_t) \in \Omega_t$  das fest gewählte Element. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Omega_j(H) \cap \overline{\Omega}_i(Hg_t)| &= |\{Hg \in \Omega : (H, Hg) \in \Omega_j \text{ und } (Hg, Hg_t) \in \Omega_i\}| \\ &= |H|^{-1} |\{g \in G : g \in D_j \text{ und } g_t g^{-1} \in D_i\}| \\ &= |H|^{-1} |\{g \in G : g \in D_j \text{ und } g^{-1} \in g_t^{-1} D_i\}| \\ &= |H|^{-1} |\{g \in G : g \in D_j \cap D_i^{-1} g_t\}| \\ &= |H|^{-1} |D_j g_t^{-1} \cap D_i^{-1}| \\ &= |H|^{-1} |D_i \cap g_t D_j^{-1}|. \end{aligned}$$

$\square$

### 2.1.21 Definition (Strukturkonstanten)

Die Bezeichnungen seien wie in Lemma 2.1.20. Dann heißen die natürlichen Zahlen  $p_{ij}^t$  die **Strukturkonstanten von  $G$  auf  $\Omega$** .

In den obigen Überlegungen haben wir eine Basis von  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}\Omega)$  angegeben und diskutiert. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf die zu  $\mathfrak{E}$  isomorphe Hecke-Algebra  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathfrak{e}_H \mathcal{R}H)$  und untersuchen insbesondere ausgezeichnete Basen darin.

### 2.1.22 Satz (vgl. [CR81, Prop. (11.30)])

Der Ring  $\mathcal{R}$  erfülle  $|H| \in \mathcal{R}^*$ . Wir bezeichnen die Doppelnebenklassen von  $H$  in  $G$  mit  $\{D_i : 1 \leq i \leq d\}$  und Repräsentanten dieser Doppelnebenklassen mit  $\{1 = g_1, g_2, \dots, g_d\}$ . Weiter seien  $k_i = |H : H \cap H^{g_i}|$  für  $1 \leq i \leq d$  die Valenzen von  $G$  auf  $\Omega \times \Omega$ . Schließlich sei  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathfrak{e}_H \mathcal{R}H)$  mit  $\mathfrak{e}_H = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \in \mathcal{R}G$  die Hecke-Algebra zu  $\mathfrak{e}_H$ .

(a) Setze

$$\mathbf{a}_i := k_i \cdot \mathbf{e}_H g_i \mathbf{e}_H \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

Dann gilt

$$\mathbf{a}_i = |H|^{-1} \sum_{y \in D_i} y = |H|^{-1} \hat{D}_i \quad (2.2)$$

und es ist  $\{\mathbf{a}_i : 1 \leq i \leq d\}$  eine  $\mathcal{R}$ -Basis für  $\mathfrak{H}$ . Die Basiselemente  $\mathbf{a}_i$  sind unabhängig von der Wahl der Doppelnebenklassenvertreter. Wegen der Wahl von  $g_1 = 1$  ist  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_H$ .

(b) Für  $1 \leq i, j \leq d$  gilt:

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \sum_{t=1}^d \mu_{ij}^t \mathbf{a}_t$$

für gewisse  $\mu_{ij}^t \in \mathcal{R}$ . Es gilt

$$\mu_{ij}^t = |H|^{-1} |D_i \cap g_t D_j^{-1}|.$$

Nach Lemma 2.1.20 sind die Koeffizienten  $\mu_{ij}^t$  gleich den Strukturkonstanten  $p_{ij}^t$ .

(c) Der Ring  $\mathcal{R}$  erfülle zusätzlich, dass  $k_i \in \mathcal{R}^*$  für  $1 \leq i \leq d$  gilt. Wir definieren die Abbildung

$$\psi : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathcal{R}, \quad \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{a}_i \mapsto \lambda_1.$$

Dann ist

$$\beta : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \longrightarrow \mathcal{R} : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \psi(\mathbf{a}\mathbf{b})$$

eine nicht ausgeartete symmetrische und assoziative Bilinearform auf  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ . Es sei

$$\mathbf{a}_i^\vee := \mathbf{e}_H g_i^{-1} \mathbf{e}_H = k_i^{-1} \mathbf{a}_i^* \quad (2.3)$$

für  $1 \leq i \leq d$ . Dann sind die Mengen

$$\{\mathbf{a}_i : 1 \leq i \leq d\} \text{ und } \{\mathbf{a}_i^\vee : 1 \leq i \leq d\}$$

bezüglich  $\beta$  zueinander duale Basen.

□

### 2.1.23 Definition (Standardbasis)

Die Bezeichnungen seien wie in Satz 2.1.22. Dann heißen die Elemente  $\mathbf{a}_i$  für  $1 \leq i \leq d$  die **Standardbasis-Elemente von  $\mathfrak{H}$**  und  $\{\mathbf{a}_i : 1 \leq i \leq d\}$  ist die **Standardbasis von  $\mathfrak{H}$** .

**2.1.24 Korollar (Formel von Ree, vgl. [CR81, Prop. (11.34)])**

Es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 2.1.5 und Satz 2.1.22. Zudem seien  $\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{S}}(G)$  und  $\mu := \chi_{\mathfrak{S}}$  der zu  $\chi$  korrespondierende irreduzible Charakter von  $\mathfrak{S}$  (vergleiche Satz 2.1.6). Wir fixieren  $x \in G$  und die Konjugiertenklasse  $C$  von  $G$  mit  $x \in C$ . Dann spezialisiert sich die Formel von Ree in Gleichung (2.1) zu

$$\chi(x) = |C_G(x)||H|^{-1} \left( \sum_{i=1}^d k_i^{-1} \mu(\mathfrak{a}_i) |C \cap D_i| \right) \left( \sum_{i=1}^d k_i^{-1} \mu(\mathfrak{a}_i^{\vee}) \mu(\mathfrak{a}_i) \right)^{-1}.$$

**Beweis:** Zur vereinfachten Schreibweise sei mit  $\hat{X} \subset G$  im Folgenden für eine Menge  $X$  die Summe  $\hat{X} := \sum_{x \in X} x$  gemeint. Für ein  $x \in C$  sei zudem  $D_x$  diejenige Doppelnebenklasse, in der  $x$  liegt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_H \hat{C} \mathfrak{e}_H &= |H|^{-2} \sum_{x \in C, h, h' \in H} h x h' \\ &= |H|^{-2} \sum_{x \in C} |H|^2 |D_x|^{-1} \hat{D}_x \end{aligned}$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen, da  $|H|^2 |D_x|^{-1}$  die Häufigkeit ist, mit der ein Element in einer Doppelnebenklasse  $D_x$  als  $h x h'$  für  $h, h' \in H$  dargestellt werden kann. Daher folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_H \hat{C} \mathfrak{e}_H &= \sum_{j=1}^d |C \cap D_j| |D_j|^{-1} \hat{D}_j \\ &= \sum_{j=1}^d |C \cap D_j| k_j^{-1} |H|^{-1} \hat{D}_j \\ &= \sum_{j=1}^d |C \cap D_j| k_j^{-1} \mathfrak{a}_j. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\chi(\mathfrak{e}_H \hat{C} \mathfrak{e}_H) = \sum_{i=1}^d |C \cap D_i| k_i^{-1} \mu(\mathfrak{a}_i).$$

Wegen  $\mathfrak{e}_H x \mathfrak{e}_H = k_i^{-1} \mathfrak{a}_i$  für alle  $x \in D_i$  folgt

$$\sum_{y \in G} \chi(\mathfrak{e}_H y^{-1} \mathfrak{e}_H) \chi(\mathfrak{e}_H y \mathfrak{e}_H) = \sum_{i=1}^d |D_i| k_i^{-2} \mu(\mathfrak{a}_i^{\vee}) \mu(\mathfrak{a}_i) = |H| \sum_{i=1}^d k_i^{-1} \mu(\mathfrak{a}_i^{\vee}) \mu(\mathfrak{a}_i)$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Die in der Formel von Ree auftretenden Koeffizienten  $|C \cap D_i|$  spielen auch bei der Bestimmung der Charaktertafeln von Hecke-Algebren in Abschnitt 2.3 und bei der Untersuchung des Zentrums von Hecke-Algebren in Abschnitt 2.4 eine große Rolle. Wir wollen sie deshalb in die folgende Definition aufnehmen.

### 2.1.25 Definition (Klassen-Nebenklassentafel)

Die Konjugiertenklassen von  $G$  seien mit  $C_1, C_2, \dots, C_m$  und die Doppelnebenklassen von  $H$  in  $G$  mit  $D_1, D_2, \dots, D_d$  bezeichnet. Dann heißt die Matrix  $\text{CCT}_H$  mit den Einträgen

$$[\text{CCT}_H]_{ij} := |C_i \cap D_j|$$

für  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq d$  die  **$H$ -Klassen-Nebenklassen-Tafel von  $G$** . Ist die Untergruppe  $H$  klar, so schreiben wir  $\text{CCT}_{ij}$ .

Die **reduzierte Klassen-Nebenklassen-Tafel von  $G$**  ist die Matrix  $\text{rCCT} = [b_{ij}]$  mit

$$b_{ij} = \frac{|C_i \cap D_j|}{k_j}$$

für  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq d$ .

### 2.1.26 Bemerkung

Die Anzahl der Elemente in einer Konjugiertenklasse, die in einer Nebenklasse liegen, ist konstant über den Nebenklassen in einer Doppelnebenklasse.

Dazu fixieren wir zwei Rechtsnebenklassen  $Hx_1$  und  $Hx_2$ , die beide in der Doppelnebenklasse  $D_j = Hg_jH$  liegen, eine Konjugiertenklasse  $C_i$  und ein Element  $g \in C_i \cap Hx_1$ .

Nach Voraussetzung gibt es Elemente  $h_l, h'_l$  für  $l = 1, 2$  mit  $x_l = h'_l g_j h_l$ . Also gilt  $g \in C_i \cap Hx_1 = C_i \cap Hg_j h_1$ . Dann ist  $(h_1^{-1} h_2)^{-1} g (h_1^{-1} h_2) \in C_i \cap Hg_j h_2 = C_i \cap Hx_2$ . Daher ist jeder Eintrag der reduzierten Klassen-Nebenklassen-Tafel  $\text{rCCT}$  eine natürliche Zahl.

## 2.2 Endomorphismenringe aus $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$

Es sei  $\mathcal{R}$  ein kommutativer Hauptidealring. Die Datensammlung am Ende dieser Arbeit legt Strukturen der Endomorphismenringe der Permutationsmoduln  $\mathcal{R}_H^G$  von speziellen Untergruppen  $H$  einer endlichen Gruppe  $G$  offen. Insbesondere untersuchen wir zu einer gegebenen Untergruppe  $H \leq G$  nicht nur den Endomorphismenring  $\text{End}_G(\mathcal{R}_H^G)$  sondern auch die Endomorphismenringe  $\text{End}_N(\mathcal{R}_H^N)$  und  $\text{End}_G(\mathcal{R}_N^G)$  für  $N := N_G(H)$ . In diesem Abschnitt wollen wir bereits theoretisch Zusammenhänge dieser Endomorphismenringe darstellen, die sich allein aus dem gruppentheoretischen Zugang  $H \trianglelefteq N \leq G$  ergeben.

Zur vereinfachenden Schreibweise seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \text{End}_H^G &:= \text{End}_{\mathcal{R}G}(\mathcal{R}_H^G), \\ \text{End}_H^N &:= \text{End}_{\mathcal{R}N}(\mathcal{R}_H^N). \end{aligned}$$

Wir werden auch weiterhin die dazu isomorphen Algebren bemühen und insbesondere die Adjazenzmatrizen der jeweiligen Algebren mit

$${}^G_H A_i \text{ und } {}^N_H A_i$$

bezeichnen. Wir nummerieren die Doppelnebenklassen  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq d$  von  $H$  in  $G$  so, dass  $D_1 = H$  und

$$\bigcup_{i=1}^f D_i = N \text{ für ein } 1 \leq f \leq d$$

gilt. Zudem bezeichne  $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_d\}$  ein Repräsentanten-System dieser Doppelnebenklassen.

Die Nummerierung der  $n := |G : H|$  Nebenklassen  $H \backslash G$  sei so gewählt, dass  $Hx_1 = H$  und

$$\bigcup_{i=1}^m Hx_i = N \text{ mit } m := |N : H|$$

gilt. Dabei sei  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  eine Transversale für die (Rechts-)Nebenklassen von  $H$  in  $G$ .

J. Jacob hat sich in ihrer Dissertation [Jac04, Sec. 1.2] mit dem allgemeineren Konzept der Assoziationsschemata auseinander gesetzt und entsprechende Ergebnisse wie in diesem Abschnitt gewonnen. Wegen der konkreten Handhabbarkeit im speziellen Fall von  $\text{End}_H^G$ ,  $\text{End}_H^N$  und  $\text{End}_N^G$  wollen wir die Situation nochmals studieren.

Wir konzentrieren uns auf den strukturellen Zusammenhang zwischen  $\text{End}_H^G$  und  $\text{End}_H^N$ . Beachte, dass der Endomorphismenring  $\text{End}_H^N$  als  $\mathcal{R}$ -Algebra isomorph zum Gruppenring  $\mathcal{R}N/H$  ist.

### 2.2.1 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts.

(a) Dann gilt für alle  $1 \leq i \leq f$  und  $1 \leq s, t \leq m$ :

$$[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 1 \iff [{}^N_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 1.$$

(b) Für alle  $1 \leq i \leq f$ ,  $1 \leq s, t \leq m$  und  $m + 1 \leq v \leq n$  gilt

$$[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_v} = 0 \text{ und } [{}^G_H A_i]_{Hx_v, Hx_t} = 0.$$

(c) Es gilt für alle  $f + 1 \leq i \leq d$  und  $1 \leq s, t \leq m$ :

$$[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 0.$$

Zusammenfassend haben wir für  $1 \leq i \leq f$  Adjazenzmatrizen der Form

$${}^G_H A_i = \begin{bmatrix} * & 0_{m,n-m} \\ 0_{n-m,m} & ** \end{bmatrix},$$

wobei  $*$  eine Matrix der Dimension  $m \times m$  ist. Für  $f + 1 \leq i \leq d$  haben die Adjazenzmatrizen die Gestalt

$${}^G_H A_i = \begin{bmatrix} 0_{m,m} & * \\ \tilde{*} & ** \end{bmatrix},$$

wobei  $*$  und  $\tilde{*}$  und  $**$  entsprechend dimensionierte Matrizen sind.

**Beweis:**

- (a) Es ist  $[{}^N_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 1$  genau dann, wenn ein  $g \in N$  mit  $(Hx_s, Hx_t) = (Hg_i g, Hg)$  existiert, woraus wegen  $g \in N \subseteq G$  sofort auch  $[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 1$  folgt.  
Ist umgekehrt  $[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 1$ , so existiert ein  $g \in G$  mit  $(Hx_s, Hx_t) = (Hg_i g, Hg)$ . Somit ist  $g = hx_t$  für ein  $h \in H$ . Wegen  $1 \leq t \leq m$  und  $H \leq N$  ist  $g$  ein Element von  $N$ . Daraus folgt die umgekehrte Richtung.
- (b) Wir nehmen an  $[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_v} = 1$  für ein  $m + 1 \leq v \leq n$ . Dann ist  $Hx_s x_v^{-1} H = Hg_i H$  und nach Voraussetzung an  $i$  ist  $Hg_i H \subseteq N$ . Wegen  $H \leq N$  und  $x_s \in N$  ist also  $x_v \in N$ . Dies steht im Widerspruch zur Wahl der Nummerierung. Die andere Behauptung wird analog gezeigt.
- (c) Wäre  $[{}^G_H A_i]_{Hx_s, Hx_t} = 1$ , so wäre  $Hx_s x_t^{-1} H = Hg_i H$  also  $x_s x_t \in Hg_i H$ . Andererseits ist  $x_s x_t \in N$  wegen  $1 \leq s, t \leq m$ . Das steht im Widerspruch zur Wahl der Nummerierung.  $\square$

Aus diesen Überlegungen folgt der Satz, der den Zusammenhang zwischen  $\text{End}_H^N$  und  $\text{End}_H^G$  erläutert.

### 2.2.2 Satz

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts. Dann ist die Abbildung

$$\iota : \text{End}_H^N \longrightarrow \text{End}_H^G, \quad {}^N_H A_i \mapsto {}^G_H A_i \text{ für } 1 \leq i \leq f$$

ein injektiver  $\mathcal{R}$ -Algebren-Homomorphismus. Insbesondere kann  $\text{End}_H^N$  als Unter-  
algebra von  $\text{End}_H^G$  aufgefasst werden.  $\square$

## 2.3 Charaktertafeln

Auch die modulare Darstellungstheorie der Gruppen wird zu einem gewissen Grad von der gewöhnlichen bestimmt. Wie wir im letzten Abschnitt sahen und in den

nächsten Abschnitten sehen werden, spielt die gewöhnliche Charaktertafel eine große Rolle. In diesem Abschnitt arbeiten wir (bereits bekannte) Methoden auf, die Charaktertafel einer Hecke-Algebra mit Hilfe der Charaktertafel der zugrunde liegenden Gruppe zu berechnen.

Wir halten für diesen Abschnitt die folgenden Bezeichnungen fest. Es sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) = 0$ . Weiter seien  $G$  eine Gruppe,  $C_1, C_2, \dots, C_m$  die Konjugiertenklassen von  $G$  und  $1 = y_1, y_2, \dots, y_m$  Vertreter mit  $y_i \in C_i$ . Wir fixieren eine Untergruppe  $H \leq G$  und das Idempotent  $\mathbf{e}_H := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h$  sowie die zugehörige Hecke-Algebra  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathbf{e}_H K H)$  mit Standardbasis  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d\}$ . Weiter seien  $H = D_1, D_2, \dots, D_d$  die Doppelnebenklassen von  $H$  in  $G$  und  $g_i \in D_i$  für  $1 \leq i \leq d$ . Schließlich bezeichnen wir mit  $[\text{CCT}]_{ij} = [|C_i \cap D_j|]$  die  $H$ -Klassen-Nebenklassen-Tafel von  $G$  (vergleiche Definition 2.1.25) und mit  $[\text{ct}(G)]_{ij} = [\chi_i(y_j)]$  die Charaktertafel von  $G$ .

### 2.3.1 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie oben. Dann kann man die Charaktertafel von  $\mathfrak{H}$  aus der Charaktertafel von  $G$  mittels der  $H$ -Klassen-Nebenklassen-Tafel wie folgt berechnen:

$$[\mu_i(\mathbf{a}_j)] = |H|^{-1} [\text{ct}(G) \cdot \text{CCT}]_{ij}^* = |H|^{-1} \left[ \sum_{l=1}^m \chi_i(y_l) |C_l \cap D_j| \right]^*,$$

wobei  $[\cdot]^*$  aus  $[\cdot]$  durch Streichen der Nullzeilen entsteht.

**Beweis:** Wir haben in Satz 2.1.22 die Basiselemente  $\mathbf{a}_i$  durch  $\mathbf{a}_i = k_i \mathbf{e}_H g_i \mathbf{e}_H$  definiert. Weiterhin korrespondiert zu jedem irreduziblen Charakter  $\mu_i$  von  $\mathfrak{H}$  ein irreduzibler Charakter  $\chi_i$  von  $G$ , so dass  $(\chi_i)_{|\mathfrak{H}} = \mu_i$  gilt. Daher folgt für  $1 \leq j \leq d$ :

$$\begin{aligned} \mu_i(\mathbf{a}_j) &= k_j \chi_i(\mathbf{e}_H g_j \mathbf{e}_H) \\ &= |H|^{-2} k_j \sum_{h, h' \in H} \chi_i(h g_j h') \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1.15 ist  $k_j = |D_j|/|H|$ . Außerdem kommt jedes Element aus  $D_j$  in obiger Summe genau  $|H|^2 |D_j|^{-1}$  mal vor. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mu_i(\mathbf{a}_j) &= |D_j|/|H|^3 \sum_{x \in D_j} \chi_i(x) |H|^2 |D_j|^{-1} \\ &= |H|^{-1} \sum_{l=1}^m \chi_i(y_l) \cdot |C_l \cap D_j| \\ &= |H|^{-1} [\text{ct}(G) \cdot \text{CCT}]_{i,j}. \end{aligned}$$

Ist hingegen  $\chi \in \text{Irr}_K(G) \setminus \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)$ , so ist  $\chi(\mathbf{e}_H g_j \mathbf{e}_H) = 0$  nach Bemerkung 2.1.9 für alle  $1 \leq j \leq m$ . Daher ist die entsprechende Zeile im Matrixprodukt  $[\text{ct}(G) \cdot \text{CCT}]$

eine Nullzeile. Weil  $\chi$  zu keinem gewöhnlichen irreduziblen Charakter von  $\mathfrak{H}$  korrespondiert, folgt insgesamt die Behauptung.  $\square$

Dieses Ergebnis war bereits bekannt und wird beispielsweise in [Alp08] erwähnt. Allerdings war eine Referenz für den Beweis unbekannt.

Genau wie bei Gruppen können wir über die Charakterwerte Folgendes sagen:

### 2.3.2 Bemerkung (vgl. [Zie05, La. 9.2.5])

Wir nehmen von dem Körper  $K$  zusätzlich an, dass er algebraisch abgeschlossen ist. Weiter sei  $\mu$  ein irreduzibler Charakter von  $\mathfrak{H}$ . Dann ist  $\mu(\mathbf{a}_i)$  für  $1 \leq i \leq d$  eine ganze algebraische Zahl, d.h. es existiert ein normiertes Polynom  $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$  mit  $f(\mu(\mathbf{a}_i)) = 0$ .

**Beweis:** Die lineare Fortsetzung  $\theta$  der Abbildung  $\mathbf{a}_i \mapsto A_i^{tr}$ , wobei  $A_i$  die Adjazenzmatrizen (Korollar 2.1.19) des zugehörigen Zentralisatorrings bezeichnen, ist ein  $K$ -Algebren-Isomorphismus. Via  $\theta$  können wir die Standardbasis von  $\mathfrak{H}$  mit der von  $\mathfrak{A}$  identifizieren und trotz der formalen Ungenauigkeit  $\mu(A_i)$  schreiben. Weil  $\mathfrak{A}$  halbeinfach ist, können alle Adjazenzmatrizen simultan auf Blockdiagonalgestalt gebracht werden, wobei jeder Unterblock jeweils zu einer irreduziblen Darstellung von  $\mathfrak{H}$  gehört. Weil  $A_i$  nur 1 und 0 als Einträge hat, sind die Nullstellen von  $X E_n - A_i$  ganz algebraisch und damit die Charakterwerte  $\mu(A_i)$  als Summe von Eigenwerten von  $A_i$  auch.  $\square$

### 2.3.3 Korollar

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts. Es sei  $[\mu_i(\mathbf{a}_j)]$  die Charaktertafel von  $\mathfrak{H}$ .

(a) Für alle  $\chi \in \text{Irr}_K(G) \setminus \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)$  gilt:

$$\sum_{l=1}^m \chi(y_l) |C_l \cap D_j| = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq d.$$

(b) Für alle  $1 \leq j \leq d$  gilt

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1) \mu_{\chi}(\mathbf{a}_j) = \begin{cases} |G : H|, & j = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Ist  $H \trianglelefteq G$  ein Normalteiler von  $G$ , so ist  $\mathfrak{H}$  als Algebra isomorph zur Gruppenalgebra  $K(G/H)$  und die Repräsentanten  $g_1, g_2, \dots, g_d$  der Doppelnebenklassen sind zugleich Vertreter für die Nebenklassen von  $H$  in  $G$ . Dann gilt

$$\mu_i(\mathbf{a}_j) = |H|^{-1} \sum_{l=1}^m |C_l \cap D_j| \chi_i(g_l) = \chi_i(g_j).$$

Damit entspricht  $\chi$  genau dem inflationierten Charakter von  $\mu$ .

**Beweis:**

- (a) Im Beweis zu Lemma 2.3.1 sehen wir, dass die zu  $\chi$  gehörige Zeile in der Matrix  $|H|^{-1}[\text{ct}(G)\text{CCT}]_{ij}$  eine Nullzeile ist, woraus die Behauptung sofort folgt.
- (b) Zum Zweck der übersichtlicheren Darstellung benutzen wir an dieser Stelle die Schreibweise  $\widehat{\text{Irr}}_{\mathfrak{H}}(G) := \text{Irr}(G) \setminus \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)$ . Es gilt nach Lemma 2.3.1

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\mu_{\chi}(\mathfrak{a}_j) &= |H|^{-1} \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\chi(x_l)|C_l \cap D_j| \\ &= |H|^{-1} \sum_{1 \leq l \leq m} |C_l \cap D_j| \left( \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)\chi(x_l) - \sum_{\chi \in \widehat{\text{Irr}}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\chi(x_l) \right). \end{aligned}$$

Mit den 2. Orthogonalitätsrelationen für Gruppen (vergleiche beispielsweise [CR81, Prop. (9.26)]) erhalten wir im Fall  $j = 1$

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\mu_{\chi}(\mathfrak{a}_1) = |G : H| - |H|^{-1} \sum_{1 \leq l \leq m} |C_l \cap D_1| \sum_{\chi \in \widehat{\text{Irr}}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\chi(x_l),$$

und im Fall  $j \neq 1$

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\mu_{\chi}(\mathfrak{a}_j) = -|H|^{-1} \sum_{1 \leq l \leq m} |C_l \cap D_j| \sum_{\chi \in \widehat{\text{Irr}}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\chi(x_l).$$

Für die letzte Summation gilt nach (a):

$$\sum_{1 \leq l \leq m} |C_l \cap D_j| \sum_{\chi \in \widehat{\text{Irr}}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1)\chi(x_l) = \sum_{\chi \in \widehat{\text{Irr}}_{\mathfrak{H}}(G)} \chi(1) \sum_{1 \leq l \leq m} |C_l \cap D_j| \chi(x_l) = 0.$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

- (c) Es seien  $1 \leq l_1, l_2 \leq m$  mit  $C_{l_1} \cap D_j \neq \emptyset$  und  $C_{l_2} \cap D_j \neq \emptyset$  gegeben. Wir betrachten  $\hat{\chi}_i \in \text{Irr}_K(G/H)$ , definiert durch  $\hat{\chi}_i(gH) := \chi_i(g)$ . Dann gilt  $\chi_i(g_{l_1}) = \chi_i(g_{l_2}) = \hat{\chi}_i(g_j H)$ . Daher folgt

$$\mu_i(\mathfrak{a}_j) = |H|^{-1} \sum_{l=1}^m |C_l \cap D_j| \chi_i(g_l) = |H|^{-1} \sum_{l=1}^m |C_l \cap D_j| \chi_i(y_j) = \chi_i(y_j),$$

weil  $\sum_{l=1}^m |C_l \cap D_j| = |D_j| = |H|$  ist.  $\square$

### 2.3.4 Lemma (vgl. [CR81, Thm. (11.32)])

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts. Zusätzlich seien  $\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{H}}$ ,  $\varepsilon_{\chi}^{KG} \in KG$  das zu  $\chi$  gehörige zentrale Idempotent von  $KG$  und  $\mu := \chi|_{\mathfrak{H}}$  der zu  $\chi$  gehörige irreduzible Charakter von  $\mathfrak{H}$ . Dann ist  $\mathfrak{e}_H \varepsilon_{\chi}^{KG}$  nach Korollar 2.1.10 ein Idempotent von  $\mathfrak{H}$  und wir erhalten die Darstellung

$$\mathfrak{e}_H \varepsilon_{\chi}^{KG} = \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{i=1}^d \frac{\mu(\mathbf{a}_i)}{|D_i|} \widehat{D}_i = \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{i=1}^d \mu(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i^{\vee} = \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{i=1}^d \mu(\mathbf{a}_i^{\vee}) \mathbf{a}_i.$$

**Beweis:** Mit  $D_g$  bezeichnen wir die Doppelnebenklasse, zu der  $g$  gehört. Zur Erinnerung sei für einen Index  $i$  der Index  $i^*$  wie in Definition 2.1.12 definiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_H \left( \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) g^{-1} \right) \mathfrak{e}_H &= \frac{\chi(1)}{|H|^2 |G|} \sum_{g \in G, h, h' \in H} \chi(g) h g^{-1} h' \\ &= \frac{\chi(1)}{|H|^2 |G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \frac{|H|^2}{|D_{g^{-1}}|} \widehat{D}_{g^{-1}} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{j=1}^m \chi(x_j) \sum_{g \in C_j} \frac{\widehat{D}_{g^{-1}}}{|D_{g^{-1}}|} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{j=1}^m \chi(x_j) \sum_{i=1}^d |C_j \cap D_i| \frac{\widehat{D}_{i^*}}{|D_{i^*}|}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.3.1, Lemma 2.1.15 und Gleichung (2.2) auf Seite 28 gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_H \left( \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) g^{-1} \right) \mathfrak{e}_H &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \chi(x_j) |C_j \cap D_i| \frac{\widehat{D}_{i^*}}{|D_{i^*}|} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{i=1}^d \frac{\mu(\mathbf{a}_i)}{|D_{i^*}|} \widehat{D}_{i^*} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{i=1}^d \frac{\mu(\mathbf{a}_i)}{k_i} \mathbf{a}_{i^*} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{i=1}^d \mu(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i^{\vee}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus Gleichung (2.3) in Lemma 2.1.22.  $\square$

Wie schon in Korollar 2.1.8 bemerkt, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^K$  des Permutationsmoduls  $K_H^G$  genau dann kommutativ, wenn alle irreduziblen Konstituenten im Permutationscharakter mit Vielfachheit 1 vorkommen. Nach dem Satz

von Wedderburn ist aber in diesem Fall

$$\dim_K \mathfrak{E}^K = \dim_K \mathbf{Z}(\mathfrak{E}^K) = \sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{E}^K}(G)} \mu_\chi(1)^2.$$

Andererseits indizieren wir die Spalten der Charaktertafel mit allen Adjazenzmatrizen, so dass wir genau im kommutativen Fall eine quadratische Charaktertafel haben.

## 2.4 Das Zentrum

Wir fixieren eine Gruppe  $G$  und eine Untergruppe  $H \leq G$  von  $G$ . Es seien  $F$  ein Körper mit  $\text{char}(F) \nmid |G|$ , so dass  $F$  Zerfällungskörper von  $FG$  ist. Dann ist das Idempotent  $\mathfrak{e}_H := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \in FH$  und wir können die Hecke-Algebra  $\mathfrak{H} := \mathfrak{e}_H FG \mathfrak{e}_H$  betrachten. Mit  $\mathfrak{A}$  bezeichnen wir die dazu isomorphe Adjazenzalgebra. Die Standardbasis von  $\mathfrak{H}$  sei mit  $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_d\}$  bezeichnet (vergleiche Satz 2.1.22).

Die Konjugiertenklassen von  $G$  seien mit  $C_1, C_2, \dots, C_m$  und die Doppelnebenklassen von  $H$  in  $G$  mit  $D_1, D_2, \dots, D_d$  bezeichnet. Schließlich sei (r)CCT die (reduzierte)  $H$ -Klassen-Nebenklassen-Tafel von  $G$  (vergleiche Definition 2.1.25). Zur Erinnerung: In Lemma 2.1.10 wurde bereits

$$\mathfrak{e}_H Z(FG) \mathfrak{e}_H = Z(\mathfrak{H}) = Z(\mathfrak{e}_H FG \mathfrak{e}_H)$$

bewiesen. Wir wollen den Körper  $F$  in dieser Formulierung spezifizieren und als Element eines  $p$ -modularen Zerfällungssystems verstehen. Es sei  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares Zerfällungssystem für  $G$  mit  $p = \text{char}(k) \nmid |G|$ . Zudem seien wie in Lemma 2.1.10 die einfachen  $KG$ -Moduln mit  $V_1, V_2, \dots, V_l$  bezeichnet, wobei die Anordnung so gewählt ist, dass

$$V_1 \mathfrak{e}_H \neq 0, V_2 \mathfrak{e}_H \neq 0, \dots, V_r \mathfrak{e}_H \neq 0 \text{ und } V_{r+1} \mathfrak{e}_H = 0, \dots, V_l \mathfrak{e}_H = 0 \quad (2.4)$$

für ein  $1 \leq r \leq l$  gilt. Für  $1 \leq i \leq l$  seien  $\mathcal{O}$ -Formen von  $V_i$  mit  $X_i$  bezeichnet.

Schließlich sei  $\bar{\phantom{x}} : \mathcal{O}G \rightarrow kG$ ,  $x \mapsto \bar{x}$  die kanonische Abbildung.

Beachte, dass  $kG$  halbeinfach ist und somit die reduzierten Gitter  $\bar{X}_i$  für  $1 \leq i \leq l$  die projektiv unzerlegbaren  $kG$ -Moduln sind.

### 2.4.1 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie gerade erläutert. Dann gilt:

$$\dim_K(Z(\mathfrak{e}_H KG \mathfrak{e}_H)) = \dim_k(Z(\bar{\mathfrak{e}}_H kG \bar{\mathfrak{e}}_H)).$$

**Beweis:** Nach Lemma 1.2.10 und Bemerkung 1.7.2(b) gilt:

$$\begin{aligned} \dim_k(\overline{X}_i \overline{\mathbf{e}}_H) &= \dim_k(\operatorname{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_i)) \\ &= \dim_k(\overline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G, X_i)) \\ &= \operatorname{rang}_{\mathcal{O}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G, X_i)) \\ &= \dim_K(\operatorname{Hom}_{KG}(K_H^G, V_i)), \end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nach Lemma 1.3.9 gilt. Mit [NT89, Thm. 11.7] folgt daraus:

$$\dim_k(\overline{X}_i \overline{\mathbf{e}}_H) = \dim_K(\operatorname{Hom}_{KG}(K_H^G, V_i)) = \dim_K(V_i \mathbf{e}_H).$$

Daraus folgt, dass genau dann  $\overline{X}_i \overline{\mathbf{e}}_H = 0$  ist, wenn  $V_i \mathbf{e}_H = 0$  ist. Nach Lemma 1.2.13 sind somit  $\overline{X}_i \overline{\mathbf{e}}_H$  für  $1 \leq i \leq r$  die einfachen  $\overline{\mathbf{e}}_H k^G \overline{\mathbf{e}}_H$ -Moduln und es folgt die Behauptung.  $\square$

In Gruppenalgebren ist die Menge  $\{\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n\}$  der Konjugiertenklassensummen eine  $K$ -Basis des Zentrums. Wir können die zugehörigen kondensierten Elemente  $\mathbf{e}_H \hat{C}_i \mathbf{e}_H$  untersuchen und erhalten das folgende Lemma:

#### 2.4.2 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie oben. Dann gilt für  $1 \leq i \leq n$

$$\mathbf{e}_H \hat{C}_i \mathbf{e}_H = \sum_{j=1}^d [\text{CCT}]_{ij} \mathbf{a}_{j^*}^\vee = \sum_{j=1}^d [\text{rCCT}]_{ij} \mathbf{a}_j.$$

Insbesondere ist  $\dim_K(Z(\mathbf{e}_H K^G \mathbf{e}_H)) = \operatorname{rang}(\text{CCT})$ .

**Beweis:** Im Beweis zu Korollar 2.1.24 haben wir bereits die Gleichheit

$$\mathbf{e}_H \hat{C}_i \mathbf{e}_H = \sum_{j=1}^d k_j^{-1} |C_i \cap D_j| \mathbf{a}_j$$

gezeigt. Aus Gleichung (2.3) (Seite 28) folgt

$$\mathbf{e}_H \hat{C}_i \mathbf{e}_H = \sum_{j=1}^d |C_i \cap D_j| \mathbf{a}_{j^*}^\vee.$$

Weil  $|C_i \cap D_j|$  genau der  $i, j$ -Eintrag der Klassen-Nebenklassen-Tafel ist, folgt zusammen mit Lemma 2.1.10, dass  $\dim_K(Z(\mathfrak{H})) = \dim_K(\operatorname{im}(\text{CCT})) = \operatorname{rang}(\text{CCT})$  ist.  $\square$

J. L. Alperin hat das Zentrum einer Hecke-Algebra über  $\mathbb{Z}$  als additive abelsche Gruppe untersucht. Bevor wir sein Ergebnis zitieren, müssen wir die darin vorkommenden Strukturen präzise einordnen.

Es sei  $\mathbf{e}_H := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \in \mathbb{Q}G$ , aufgefasst als Element des Gruppenrings über den rationalen Zahlen. Wir setzen

$$\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}} := \langle \mathbf{a}_i : 1 \leq i \leq d \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Nach Bemerkung 1.7.2 ist  $\mathbf{e}_H \mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}_H^G$ , und es gilt  $\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}} \cong \text{End}_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{e}_H \mathbb{Z}G)$  nach Satz 2.1.22(b).

Betrachte nun

$$Z_0 := \mathbf{e}_H Z(\mathbb{Z}G) \mathbf{e}_H = \langle \mathbf{e}_H \hat{C}_i \mathbf{e}_H : 1 \leq i \leq m \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Wegen Bemerkung 2.1.26 und Lemma 2.4.2 gilt  $Z_0 \leq \mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}$ . Offensichtlich ist  $\mathbf{e}_H \mathbb{Z}G \mathbf{e}_H \leq \mathbb{Q}G$ , so dass wir innerhalb von  $\mathbb{Q}G$  die Inklusion

$$Z_0 \leq Z := Z(\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}) \leq \mathfrak{H}_{\mathbb{Z}} \leq \mathbf{e}_H \mathbb{Z}G \mathbf{e}_H \leq \mathbb{Q}G$$

haben.

### 2.4.3 Satz ([Alp08])

Die Bezeichnungen seien wie oben. Dann ist der Quotient

$$Z/Z_0 = Z(\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}})/\mathbf{e}_H(Z(\mathbb{Z}G))\mathbf{e}_H$$

eine abelsche Gruppe von endlicher Ordnung, die gleich dem Produkt aller (von 0 verschiedenen) Invariantenteiler der reduzierten Klassen-Nebenklassen-Tafel ist.

**Beweis:** Beachte zunächst, dass  $Z/Z_0$  nach Lemma 2.1.10 mit  $F = \mathbb{Q}$  endliche Ordnung hat. Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten.

1. Schritt: Zeige, dass  $Z/Z_0$  die Torsionsgruppe der endlich erzeugten abelschen Gruppe  $\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}/Z_0$  ist. Es sei  $T/Z_0$  die Torsionsgruppe von  $\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}/Z_0$ . Dann gibt es für ein beliebiges Element  $t \in T$  eine natürliche Zahl  $n$ , so dass  $nt =: z_t \in Z_0$  ist. Also gilt für den Kommutator  $[t, h] := th - ht$ :

$$n[t, h] = nth - nht = z_t h - h z_t = 0,$$

so dass  $[t, h]$  endliche Ordnung für ein beliebiges  $h \in \mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}$  hat. Aber in der freien abelschen Gruppe  $\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}$  hat nur das Element 0 endliche Ordnung. Daher gilt  $T \subseteq Z$  und es folgt Gleichheit.

2. Schritt: Zeige, dass sich die Torsionsgruppe  $Z/Z_0$  von  $\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}/Z_0$  aus den von 0 verschiedenen Invariantenteilern von [rCCT] berechnet. Weil  $\{\mathbf{a}_i : 1 \leq i \leq n\}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}}$  ist und  $Z_0 = \langle \mathbf{e}_H \hat{C}_i \mathbf{e}_H : 1 \leq i \leq n \rangle_{\mathbb{Z}}$  gilt, folgt mit Lemma 2.4.2 die Behauptung.  $\square$

Betrachten wir die Situation aus Satz 2.4.3 über einem Zerfällungskörper  $K$  von  $G$ , so dass  $\text{char}(K) \nmid |G|$ . Dann gibt es genau  $r$  (von 0 verschiedene) Invariantenteiler in der reduzierten Klassen-Nebenklassen-Tafel, wobei  $r$  wie in (2.4) auf Seite 37 die Anzahl der einfachen  $\mathbf{e}_H K G \mathbf{e}_H$ -Moduln (bis auf Isomorphie) ist.

### 2.4.4 Lemma

Es seien  $f_1, f_2, \dots, f_r$  die von 0 verschiedenen Invarianten-Teiler der Klassen-Nebenklassen-Tafel mit  $f_1 \mid f_2 \mid \dots \mid f_r$ . Dann gilt  $p \mid |G|$  für jede Primzahl  $p$  mit  $p \mid f_r$ .

**Beweis:** Wir nehmen an,  $p \mid f_r$  und  $p \nmid |G|$ . Es seien alle Bezeichnungen wie in Satz 2.4.3. Dann existiert eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$  von  $Z = Z(\mathfrak{H}_{\mathbb{Z}})$ , so dass  $\{f_1 z_1, f_2 z_2, \dots, f_r z_r\}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $Z_0 = \mathfrak{e}_H Z(\mathbb{Z}G)\mathfrak{e}_H$  ist.

Betrachte ein  $p$ -modulares Zerfallungssystem  $(K, \mathcal{O}, k)$ . Dann ist  $\mathfrak{e}_H \in \mathcal{O}G$  und wir können  $Z_{0,\mathcal{O}} := \mathfrak{e}_H Z(\mathcal{O}G)\mathfrak{e}_H$  betrachten.

Einerseits ist  $\dim_K(\mathfrak{e}_H Z(KG)\mathfrak{e}_H) = r = \text{rang}_{\mathcal{O}}(Z_{0,\mathcal{O}})$  und  $\{f_1 z_1, f_2 z_2, \dots, f_r z_r\}$  ist auch eine  $\mathcal{O}$ -Basis von  $Z_{0,\mathcal{O}}$ .

Andererseits ist  $\overline{Z_{0,\mathcal{O}}} = \bar{\mathfrak{e}}_H Z(kG)\bar{\mathfrak{e}}_H$  wegen  $Z_{0,\mathcal{O}} = \langle \mathfrak{e}_H \hat{C}_i \mathfrak{e}_H : 1 \leq i \leq m \rangle_{\mathcal{O}}$ .

Aber  $\overline{f_r z_r} = \bar{f}_r \bar{z}_r = 0$ , weswegen  $\dim_k(\bar{\mathfrak{e}}_H Z(kG)\bar{\mathfrak{e}}_H) < r$  gilt. Das ist aber wegen Lemma 2.1.10 ein Widerspruch zu Lemma 2.4.1.  $\square$

Wir haben am Ende dieser Arbeit eine Datensammlung bereit gestellt, die eine Auflistung sämtlicher Strukturmerkmale von verschiedenen Endomorphismenringen aufzeigt. Von den einigermaßen klein-dimensionalen Beispielen können wir die Dimension des Zentrums in verschiedenen Charakteristiken untersuchen. Zum einen bemerken wir hier, dass hin und wieder eine Dimensionsvergrößerung beim Übergang von Charakteristik 0 nach Charakteristik  $p$  stattfindet (etwa beim Endomorphismenring  $\text{End}_{KG}(K_P^G)$  für  $G = A_6$ ,  $P \in \text{Syl}_5(G)$ ,  $p = 5$ ). Auffällige andere Merkmale des Zentrums insbesondere im Hinblick auf die modulare Darstellungstheorie dieser Algebren haben wir an diesen Beispielen nicht festgestellt. Überhaupt ist ein Zusammenhang zwischen den modularen Charakteren oder deren Anzahl modulo  $p$  und der Dimension des Zentrums über Charakteristik  $p$  nicht offensichtlich.

## 2.5 Symmetrische Endomorphismenringe

Es sei  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares System. Das eindeutig bestimmte maximale Ideal  $\mathfrak{p}$  von  $\mathcal{O}$  sei von  $\pi$  erzeugt. Es seien  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Wir fixieren den Endomorphismenring  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G)$  und bezeichnen die Konstantenerweiterung  $\mathfrak{E} \otimes_{\mathcal{O}} K$  mit  $\mathfrak{E}^K$ . Die dazu isomorphe Adjazenzalgebra  $\mathfrak{A}^K$  hat die Adjazenzmatrizen  $(A_1, A_2, \dots, A_d)$  als  $K$ -Basis. Weil dies Matrizen mit  $(0, 1)$ -Einträgen sind, können wir  $(A_1, A_2, \dots, A_d)$  als Basis von  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{A}^k \cong \overline{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}/\mathfrak{A}\pi$  betrachten. Insbesondere haben  $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^K$  und  $\mathfrak{E}^k$  den gleichen Rang bzw. die gleiche Dimension.

In diesem Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Voraussetzungen  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\overline{\mathfrak{A}}$  symmetrische Algebren sind.

Wir bekommen auf natürliche Weise zwei symmetrische Bilinearformen für  $\mathfrak{A}$ . Die erste Bilinearform, deren Nicht-Ausgeartetheit genau bestimmbar ist, ergibt sich aus der natürlichen Darstellung, vergleiche dazu auch Satz 2.1.22(c).

### 2.5.1 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts. Sind alle Valenzen  $k_i$  Einheiten in  $\mathcal{O}$ , so sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^k$  symmetrisch.

**Beweis:** Es seien  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  und  $k_i^\theta := k_i$ , falls  $\theta = \mathcal{O}$  und  $k_i^\theta := \bar{k}_i$ , falls  $\theta = k$  ist. Dann ist die bilineare Fortsetzung von

$$\beta^N : \mathfrak{A}^\theta \times \mathfrak{A}^\theta \longrightarrow \theta : (A_i, A_j) \mapsto k_i^\theta \delta_{ij^*}$$

eine symmetrische und nicht ausgeartete Bilinearform.  $\square$

Beachte, dass diese Bilinearform  $\beta^N$  aus der **natürlichen Darstellung**, die die lineare Fortsetzung von  $\mathfrak{A}^\theta \rightarrow \mathfrak{A}^\theta : A_i \mapsto A_i$  ist, abgeleitet wird. Dann ist  $\beta^N$  nämlich nach Skalierung gleich der Abbildung, die ein Tupel  $(A, A') \in \mathfrak{A}^\theta \times \mathfrak{A}^\theta$  auf die Spur ihres Produkts abbildet.

Die zweite Bilinearform, ergibt sich aus der regulären Darstellung. Allerdings finden wir hier keine einfache hinreichende Bedingung für ihre Nicht-Ausgeartetheit.

### 2.5.2 Definition und Bemerkung (kollabierte Adjazenzmatrix)

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts. Zudem sei für  $1 \leq i \leq d$  die Matrix  $[B_i]_{jt} := p_{ji}^t$  die zu  $A_i$  gehörige **kollabierte Adjazenzmatrix**. Dann ist die bilineare Fortsetzung  $\beta^R$  der Abbildung

$$\mathfrak{A}^\theta \times \mathfrak{A}^\theta \longrightarrow \theta : (A_m, A_n) \mapsto \text{Tr}(B_m B_n) = \sum_{s,t=1}^n p_{sm}^t p_{tn}^s,$$

eine Bilinearform auf  $\mathfrak{A}$ .

Die Indizierung  $\beta^R$  deutet an, dass sich diese Bilinearform aus der **regulären Darstellung** ableitet, die die lineare Fortsetzung von  $\mathfrak{A}^\theta \rightarrow \mathfrak{A}^\theta : A_i \mapsto B_i$  ist, wobei  $B_i$  die zu  $A_i$  kollabierte Matrix bezeichnet.

### 2.5.3 Bemerkung

Die Umkehrung von Lemma 2.5.1 ist nicht richtig. Man betrachte zum Beispiel die Mathieu-Gruppe  $G = M_{11}$ , die auf den Nebenklassen nach  $H := A_6.2_3$  vielfachheitsfrei operiert. Dann ist  $|G : H| = 11$ ,  $k_1 = 1, k_2 = 10$ . Die Gram-Matrix, die sich aus der zweiten Bilinearform  $\beta^R$  ergibt, hat Determinante 121. Insbesondere sind die entsprechenden Algebren in Charakteristik  $p = 2, 5$  symmetrisch, obwohl diese Primzahlen die Valenz  $k_2$  teilen und die erste Bilinearform  $\beta^N$  ausgeartet ist.

## 2.6 Das Schur-Element

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Zudem sei  $K$  ein Körper der Charakteristik 0, so dass  $KG$  und  $KH$  halbeinfach und zerfallend über  $K$  sind.

Dann ist  $\mathbf{e}_H := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \in KH$ . Wir fixieren die zugehörige Hecke-Algebra  $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(G, H, \mathbf{e}_H KH)$ , die dann auch halbeinfach (vergleiche Satz 2.1.5) und symmetrisch (vergleiche Lemma 1.5.3) ist. Es sei  $\beta$  die nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform aus Satz 2.1.22 auf  $\mathfrak{H}$ . Die Standardbasis sei mit  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d\}$  und die dazu duale Basis bzgl.  $\beta$  mit  $\{\mathbf{a}_1^\vee, \mathbf{a}_2^\vee, \dots, \mathbf{a}_d^\vee\}$  bezeichnet (vergleiche Satz 2.1.22). Außerdem sei  $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  ein Repräsentantensystem der einfachen  $\mathfrak{H}$ -Moduln mit korrespondierenden irreduziblen Charakteren  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \text{Irr}_K(\mathfrak{H})$ . Wir wenden in diesem Abschnitt die Ergebnisse aus Abschnitt 1.6 auf unsere speziellen Voraussetzungen an.

In Proposition 1.6.6 finden wir für die zentral primitiven Idempotente die Darstellung

$$\varepsilon_{S_i} = \frac{1}{c_{S_i}} \sum_{l=1}^d \mu_i(\mathbf{a}_l^\vee) \mathbf{a}_l.$$

Andererseits haben wir in Lemma 2.3.4 die Darstellung

$$\varepsilon_{S_i} = \frac{\chi(1)}{|G : H|} \sum_{l=1}^d \mu_i(\mathbf{a}_l^\vee) \mathbf{a}_l,$$

wobei  $\chi_i \in \text{Irr}_K(G)$  der zu  $\mu_i$  korrespondierende Charakter von  $G$  ist (vergleiche Satz 2.1.6). Da die zentral primitiven Idempotente unter den gegebenen Voraussetzungen nach Bemerkung 1.2.14 eindeutig sind, können wir die Koeffizienten vergleichen und erhalten den folgenden Satz.

### 2.6.1 Satz

Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie oben. Dann gilt für das zum einfachen  $\mathfrak{H}$ -Modul  $S_i$  gehörige Schur-Element

$$c_{S_i} = \frac{|G : H|}{\chi_i(1)}.$$

□

## 2.7 Halbeinfachheit

In diesem Abschnitt seien  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$  und  $F$  ein Körper. Wir fixieren den Endomorphismenring  $\mathfrak{E} := \text{End}_F(F_H^G)$  und betrachten die dazu isomorphe Adjazenz-Algebra  $\mathfrak{A}$ . Es ist durchaus möglich, dass der Gruppenring  $FG$  nicht halbeinfach ist, die Adjazenz-Algebra jedoch wohl (zum Beispiel der Endomorphismenring des Permutationsmoduls  $F_P^G$  für eine  $p$ -Sylowgruppe  $P$  in  $G$ , die zudem ein Normalteiler von  $G$  ist). J. Jacob hat in ihrer Dissertation [Jac04] Beispiele angegeben, bei denen Valenzen von der zugrunde liegenden Charakteristik geteilt wurden; darunter fanden sich sowohl halbeinfache

als auch nicht halbeinfache Adjazenz-Algebren, so dass für eine Charakterisierung von Halbeinfachheit andere Verknüpfungen der Bedingungen nötig sind als nur das Produkt der Valenzen. A. Hanaki hat in [Han00] die Frage nach der Halbeinfachheit von Adjazenz-Algebren beantwortet. Er kommt zu dem Resultat, dass die Halbeinfachheit an der so genannten Frame-Zahl der Adjazenz-Algebra entschieden werden kann.

### 2.7.1 Definition (Frame-Zahl)

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts. Zusätzlich seien  $K$  ein Körper der Charakteristik 0 und  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r \in \text{Irr}_K(G)$  die Konstituenten des gewöhnlichen Permutationscharakters  $1_H^G$  mit den jeweiligen Vielfachheiten  $m_j$ . Es seien  $\dim_K(\mathfrak{A}) = d$  und  $k_1, k_2, \dots, k_d$  die Valenzen von  $\mathfrak{A}$ . Dann ist die **Frame-Zahl** von  $\mathfrak{A}$  durch

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) := \frac{|G : H|^d \prod_{i=1}^d k_i}{\prod_{j=1}^r \chi_j(1)^{m_j^2}}$$

definiert.

### 2.7.2 Lemma ([Wei76, Thm. L9])

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.7.1. Dann ist die Frame-Zahl eine ganze Zahl.  $\square$

### 2.7.3 Satz ([Han00])

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.7.1. Zusätzlich seien  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares System und  $\mathfrak{F}$  die Frame-Zahl von  $\mathfrak{A}$ . Dann ist die Adjazenz-Algebra  $\mathfrak{A}^k$  über  $k$  genau dann halbeinfach, wenn  $p$  nicht die Frame-Zahl teilt.  $\square$

### 2.7.4 Bemerkung

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.7.1. Zusätzlich nehmen wir an, dass  $H \trianglelefteq G$  ein Normalteiler von  $G$  ist und dass  $K$  ein Zerfällungskörper von  $KG$  ist. Dann ist die Adjazenz-Algebra isomorph zu  $K(G/H)$ . Die Charaktere von  $\text{Irr}_{\mathfrak{A}}(G) := \{\chi \in \text{Irr}_K(G) : \langle 1_H^G, \chi \rangle \neq 0\}$  sind genau die inflationierten Charaktere von  $K(G/H) \cong \mathfrak{A}$ . Daher gilt  $\chi(1) = \mu_{\chi}(1)$  für alle  $\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)$  nach Korollar 2.3.3(c). Die Frame-Zahl von  $\mathfrak{A}$  ist dann durch

$$\mathfrak{F} = \frac{|G : H|^d}{\prod_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)} \chi(1)^{\mu_{\chi}(1)^2}} = \frac{|G : H|^d}{\prod_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)} \mu_{\chi}(1)^{\mu_{\chi}(1)^2}}$$

gegeben. Nun gilt nach Wedderburn  $\sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)} \mu_{\chi}(1)^2 = d$ . Daher kann man die Faktoren in der Frame-Zahl wie folgt arrangieren:

$$\mathfrak{F} = \prod_{\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)} \left( \frac{|G : H|}{\mu_{\chi}(1)} \right)^{\mu_{\chi}(1)^2}.$$

Weil  $G/H$  eine Gruppe ist, ist jeder einzelne Faktor eine ganze Zahl. Daher teilt  $p$  die Frame-Zahl genau dann nicht, wenn  $p$  keinen Faktor  $|G : H|/\mu_{\chi_i}(1)$  teilt.

Dies ist genau das aus der modularen Darstellungstheorie von Gruppen bekannte Defekt-0-Kriterium für die Charaktere von  $G/H$ .

## 2.8 Blöcke

Wir fixieren eine Gruppe  $G$ , eine Primzahl  $p$  und ein  $p$ -modulares Zerfallungssystem  $(K, \mathcal{O}, k)$  für  $G$ . Das eindeutig bestimmte maximale Ideal von  $\mathcal{O}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{p}$ .

Wie im vorherigen Abschnitt seien  $H \leq G$  und  $\Omega$  die Menge der Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$ . Dann operiert  $G$  auf  $\Omega$  transitiv und wir bezeichnen den zugehörigen Permutationsmodul über  $\mathcal{O}$  mit  $\mathcal{O}\Omega$ . Schließlich seien  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}\Omega)$ ,  $\mathfrak{E}^K = \text{End}_{KG}(\mathcal{O}\Omega) \otimes_{\mathcal{O}} K$  und  $\mathfrak{E}^k = \text{End}_{kG}(\mathcal{O}\Omega) \otimes_{\mathcal{O}} k$ .

Wir können nun auf das Tripel  $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^K, \mathfrak{E}^k$  die Ergebnisse aus Abschnitt 1.3 anwenden. Zuvor erinnern wir an die Fitting-Korrespondenz (vergleiche Satz 1.2.5) angewendet auf  $\mathfrak{E}^K$ .

### 2.8.1 Bemerkung

Die Bezeichnungen seien wie in der Einleitung dieses Abschnitts. Dann sind  $\mathcal{O}\Omega \otimes_{\mathcal{O}} K =: K\Omega$  und  $\mathfrak{E}^K$  halbeinfach. Es seien  $V_1, V_2, \dots, V_r$  Repräsentanten der Isomorphieklassen der einfachen  $KG$ -Moduln, die in  $K\Omega$  vorkommen. Wir setzen  $m_i := \dim_K(V_i)$  und betrachten die homogene Zerlegung von  $K\Omega$  als  $KG$ -Modul

$$K\Omega = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_r,$$

wobei  $H_i \cong V_i^{n_i} := V_i \oplus V_i \oplus \dots \oplus V_i$  die  $n_i$ -fache Summe von  $V_i$  ist für  $1 \leq i \leq r$ . Dann ist

$$\text{Hom}_{KG}(H_i, H_j) \cong \begin{cases} K^{n_i \times n_i}, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

und somit ist  $\mathfrak{E}^K \cong \bigoplus_{i=1}^r K^{n_i \times n_i}$  eine Zerlegung in minimale zweiseitige Ideale. Dieses Ergebnis können wir auch mit Hilfe von zentralen Idempotenten interpretieren. Ist nämlich  $\varepsilon_i \in \mathfrak{E}^K$  die Projektion auf  $H_i$ , so ist  $\varepsilon_i$  nach Satz 1.2.15 ein zentral primitives Idempotent von  $\mathfrak{E}^K$  und  $1 = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i$  ist eine Idempotentzerlegung in zentral primitive Idempotenten. Folglich ist  $\mathfrak{E}^K = \bigoplus_{i=1}^r \varepsilon_i \mathfrak{E}^K \varepsilon_i$  und nach Lemma 1.2.10 gilt  $\varepsilon_i \mathfrak{E}^K \varepsilon_i \cong \text{End}_{KG}(H_i) \cong K^{n_i \times n_i}$ .

Es seien nun  $S_1, S_2, \dots, S_r$  die einfachen  $\mathfrak{E}^K$ -Moduln, wobei die Nummerierung so gewählt sei, dass  $S_i = \text{Hom}_{KG}(K\Omega, V_i) \subseteq \mathfrak{E}^K$  für alle  $1 \leq i \leq r$  gilt. Dann gilt

$$S_j \varepsilon_i = \varepsilon_i S_j \varepsilon_i = \varepsilon_i S_j = \begin{cases} S_i, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

und  $\dim_K S_i = n_i$  für alle  $1 \leq i \leq r$ .

**2.8.2 Satz ([Lan83, Prop. II 12.11])**

Die Bezeichnungen seien wie in Bemerkung 2.8.1. Weiter seien  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$  die Schur-Basis von  $\mathfrak{E}^K$  mit  $\varphi_1 = \text{id}_{K\Omega}$  und  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  die zu  $S_1, S_2, \dots, S_r$  gehörigen irreduziblen  $\mathfrak{E}^K$ -Charaktere. Dann gilt

(a)

$$\varepsilon_i = \frac{\dim_K(V_i)}{|\Omega|} \sum_{l=1}^d \frac{1}{k_l} \mu_i(\varphi_{l^*}) \varphi_l.$$

(b)

$$\dim_K(S_i) = \frac{\dim_K(V_i)}{|\Omega|} \sum_{l=1}^d \frac{1}{k_l} \mu_i(\varphi_l) \mu_i(\varphi_{l^*}).$$

(c) Es gelten für alle  $1 \leq i, j \leq r$  die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{l=1}^d \frac{1}{k_l} \mu_i(\varphi_{l^*}) \mu_j(\varphi_l) = \delta_{ij} |\Omega| \frac{\dim_K(S_i)}{\dim_K(V_i)},$$

wobei  $\delta_{ij}$  die Kronecker-Funktion bezeichnet. □

**2.8.3 Bemerkung**

- (a) Mit Korollar 2.1.10 hätten wir die Formeln aus Satz 2.8.2 auch anhand der Standardbasis aus Satz 2.1.22 direkt beweisen können.
- (b) Im Gruppenring  $KG$  haben die zentral primitiven Idempotenten die Darstellung

$$\varepsilon_i^{KG} = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{l=1}^m \chi_i(g_l^{-1}) g_l,$$

wobei  $\chi_i$  der zu  $\varepsilon_i^{KG}$  gehörige irreduzible Charakter von  $G$  ist (vergleiche Satz 1.2.17). Die strukturelle Ähnlichkeit ist groß und deshalb ergeben sich Analogien wie beispielsweise die Orthogonalitätsrelationen.

- (c) Ist  $H \trianglelefteq G$  sogar ein Normalteiler, so ist  $\mathfrak{E}^K$  als Algebra isomorph zur Gruppenalgebra  $K(G/H)$ . Tatsächlich führen dann auch die obigen Orthogonalitätsrelationen zu den 1. Orthogonalitätsrelationen für Gruppen (vergleiche zum Beispiel [CR81, Prop. (9.21)(i)]), wenn man beachtet, dass in diesem Fall  $k_i = 1$  für alle  $1 \leq i \leq d$  gilt.

**2.8.4 Definition und Bemerkung**

Die Bezeichnungen seien wie in Bemerkung 2.8.1. Wir betrachten für  $1 \leq i \leq r$  die  $K$ -Algebren-Homomorphismen

$$\omega_i^* : \mathfrak{E}^K \longrightarrow K, \sum_{j=1}^d a_j \varphi_j \mapsto \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^d a_j \mu_i(\varphi_j) = \frac{1}{\mu_i(\varphi_1)} \sum_{j=1}^d a_j \mu_i(\varphi_j).$$

Dann sind  $\omega_i := (\omega_i^*)|_{Z(\mathfrak{E}^K)}$  die zentralen  $K$ -Algebren-Homomorphismen von  $\mathfrak{E}^k$ . Wir können dann jeden dieser zentralen Homomorphismen  $\omega_i$  durch

$$\omega_i\left(\sum_{j=1}^d a_j \varepsilon_j\right) = a_i$$

mit einem zentralen Idempotent  $\varepsilon_i$  assoziieren.

### 2.8.5 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie in Bemerkung 2.8.1. Dann ist  $\omega_i(\varphi_j) \in K$  ganz algebraisch über  $\mathbb{Z}$  für alle  $1 \leq i \leq r$  und  $1 \leq j \leq d$ .

**Beweis:** Für  $1 \leq i \leq d$  gilt  $\omega_i(\varphi_j)\omega_i(\varphi_l) = \sum_{t=1}^d p_{jt}^i \omega_i(\varphi_t)$ , wobei  $p_{jt}^i$  die Strukturkonstanten bezeichnen. In der Matrixschreibweise dieser Gleichung sehen wir wegen

$$(\omega_i(\varphi_1), \omega_i(\varphi_2), \dots, \omega_i(\varphi_d))^{tr} \neq 0,$$

dass  $\det(\omega_i(\varphi_j)I_d - [p_{jl}^i]) = 0$  gelten muss. Weil  $\mathcal{O}$  in  $K$  ganz abgeschlossen ist, gilt  $\omega_i(\varphi_j) \in \mathcal{O}$ . Daher ist  $\omega_i(\varphi_j)$  Nullstelle eines normierten Polynoms in  $\mathbb{Z}[X]$ .  $\square$  Es sei  $1 \leq i \leq r$ . Wegen Lemma 2.8.5 induziert  $\omega_i$  einen Algebren-Homomorphismus

$$\omega'_i : \bar{Z} := Z(\mathfrak{E})/Z(\mathfrak{E})\mathfrak{p} \longrightarrow k.$$

Beachte, dass  $\bar{Z}$  artinsch ist und somit  $\omega'_i(J(\bar{Z})) = 0$  wegen der Nilpotenz von  $J(\bar{Z})$  gilt. Damit induziert  $\omega'_i$  einen Algebren-Homomorphismus

$$\bar{\omega}_i : \bar{Z}/J(\bar{Z}) \cong Z(\mathfrak{E}^k/J(\mathfrak{E}^k)) \longrightarrow k.$$

### 2.8.6 Lemma (vgl. [Lan83, Prop. II 12.13])

Die Bezeichnungen seien wie oben. Weiter seien  $\{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq r\}$  die Menge der Blockidempotente von  $\mathfrak{E}^K$  (wie oben) und  $\{\mathfrak{e}_i : 1 \leq i \leq s\}$  die Menge der Blockidempotente von  $\mathfrak{E}$  mit der korrespondierenden Menge von Idempotenten  $\{\bar{\mathfrak{e}}_i : 1 \leq i \leq s\}$  in  $\bar{Z}/J(\bar{Z})$  mit  $\bar{Z} := Z(\mathfrak{E})/Z(\mathfrak{E})\mathfrak{p}$ . Dann liegen  $\mathfrak{e}_i$  und  $\mathfrak{e}_j$  genau dann im gleichen Block, wenn  $\omega_i$  und  $\omega_j$  modulo  $\mathfrak{p}$  auf  $Z(\mathfrak{E})$  gleich sind.  $\square$

Aus diesen Beobachtungen folgt zusammenfassend der Satz:

### 2.8.7 Satz

Die Bezeichnungen seien wie in Bemerkung 2.8.1. Die Charaktertafel  $[\mu_i(\varphi_j)]$  von  $\mathfrak{E}^K$  bestimmt die  $p$ -Blöcke von  $\mathfrak{E}$  vollständig.  $\square$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass sich G. Robinson in [Rob94] ebenfalls mit der Blocktheorie von Hecke-Algebren auseinandergesetzt hat. Insbesondere zeigt er, dass die Anzahl der Blöcke von  $\mathfrak{E}^k$  gleich der Anzahl der unzerlegbaren direkten  $\mathcal{O}[G \times G]$ -Summanden des zweiseitigen  $\mathcal{O}G$ -Ideals  $\langle w_0 \rangle_{\mathcal{O}G}$  mit  $w_0 := \sum_{x \in H} x$  ist.

## 2.9 Zerlegungsmatrizen

Wir wollen die Definition von Zerlegungsmatrizen von Gittern aus Definition 1.4 auf Endomorphismenringe von Permutationsmoduln anwenden.

In diesem Abschnitt seien wieder  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$ . Wir fixieren eine Primzahl  $p$  und ein  $p$ -modulares Zerfällungssystem  $(K, \mathcal{O}, k)$  von  $G$ . Das eindeutige maximale Ideal  $\mathfrak{p}$  von  $\mathcal{O}$  sei von  $\pi$  erzeugt. Für  $\theta \in \{K, \mathcal{O}, k\}$  bezeichnen wir mit  $\theta_H$  den trivialen  $\theta H$ -Modul und mit  $\theta_H^G$  den nach  $G$  induzierten  $\theta G$ -Modul. Beachte, dass unter diesen Voraussetzungen auch  $\mathfrak{E}^K := \text{End}_{KG}(K_H^G)$  halbeinfach ist. Weiter sei  $[\tilde{d}_{ij}]$  die Zerlegungsmatrix des  $\theta$ -Gitters  $\theta_H^G$ , wie in Definition 1.4.1 beschrieben.

Wir können jetzt die Zerlegungsmatrix von  $\mathcal{O}_H^G$  mit der von  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G)$  mittels der Fitting-Korrespondenz aus Satz 1.2.5 in Verbindung setzen und erhalten wie in Bemerkung 1.4.2, dass die Zerlegungsmatrix  $[d_{ij}]$  von  $\mathfrak{E}$  und die von  $\mathcal{O}_H^G$  gleich sind, wenn man Repräsentantensysteme aus der Fitting-Korrespondenz zugrunde legt. Daher wird die Zerlegungsmatrix des Gitters in diesem Abschnitt auch mit  $[d_{ij}]$  bezeichnet.

Wir wollen folgende Bezeichnungen fixieren:

- Es sei

$$\mathcal{O}_H^G = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{n_j} W_{ij}$$

eine Zerlegung von  $\mathcal{O}_H^G$  in unzerlegbare  $\mathcal{O}G$ -Moduln, wobei  $W_{ij} \cong W_{mn}$  genau dann gilt, wenn  $i = m$  ist.

- Es sei  $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  ein vollständiges Repräsentantensystem der einfachen  $KG$ -Moduln, die in  $K_H^G$  vorkommen. Eine  $\mathcal{O}$ -Form von  $S_i$  bezeichnen wir mit  $X_i$  für  $1 \leq i \leq r$ .

Dann ist  $\{\text{Hom}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G, W_{i1}) : 1 \leq i \leq s\}$  ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der PIMs von  $\mathfrak{E}$ . Zudem ist  $\text{Hom}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G, X_i)$  eine  $\mathcal{O}$ -Form des einfachen  $\mathfrak{E}^K$ -Moduls  $\text{Hom}_{KG}(K_H^G, S_i)$  und es gilt nach Lemma 1.3.10(c)

$$\overline{\text{Hom}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G, X_i)} \cong \text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X_i}).$$

### 2.9.1 Lemma

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn des Abschnitts erläutert. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass  $S_1$  in der Zerlegung von  $W_{11}^K$  in einfache Summanden vorkommt. Dann ist  $d_{11} > 0$  und der einfache  $\mathfrak{E}^K$ -Modul  $\text{Hom}_{KG}(K_H^G, S_1)$  nach Reduktion modulo  $\pi$  genau dann einfach, wenn für die Zerlegungszahlen  $d_{1j} = \delta_{1j}$  für alle  $1 \leq j \leq s$  gilt.

**Beweis:** Nach dem Satz von Zassenhaus ([Lan83, Thm. I.17.3]) ist  $d_{11} > 0$ . Die zweite Aussage folgt sofort aus Bemerkung 1.4.2.  $\square$

Beachte, dass in der letzten Aussage unerheblich ist, wie oft (bis auf Isomorphie)  $W_{11}$  in der Zerlegung von  $\mathcal{O}_H^G$  vorkommt.

### 2.9.2 Korollar

Wir nehmen wieder an, dass  $S_1$  in  $W_{11}^K$  vorkommt.

- (a) Es sei  $W_{11}$  in einem anderen Block als  $W_{j1}$  für alle  $2 \leq j \leq s$ . Dann ist  $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  genau dann einfach, wenn  $d_{11} = 1$  ist.
- (b) Es ist  $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  genau dann projektiv und einfach, wenn  $d_{1j} = \delta_{1j}$  für alle  $1 \leq j \leq s$  und  $d_{i1} = \delta_{i1}$  für alle  $1 \leq i \leq r$  gilt.
- (c) Ist  $S_1$  ein Modul vom Defekt 0, so gilt  $W_{11}^K = S_1$  und  $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  ist ebenfalls projektiv einfach.
- (d) Ist  $W_{11}^K$  ein einfacher  $KG$ -Modul, und ist  $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  einfach, so ist  $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  projektiv einfach.

**Beweis:**

- (a) Aus der Voraussetzung folgt  $d_{1j} = \delta_{1j}$  woraus die Behauptung mit Lemma 2.9.1 folgt.
- (b) Die Behauptung folgt aus Lemma 2.9.1, Bemerkung 1.4.2(b) und Satz 1.3.12(a).
- (c) Dies folgt aus (b).
- (d) Die Voraussetzung an  $W_{11}^K$  bedeutet  $d_{i1} = \delta_{i1}$ . Aus der Voraussetzung an  $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  folgt  $d_{1j} = \delta_{1j}$ . Die Behauptung folgt nun aus (b).  $\square$

Ein Beispiel zu Aussage (d) findet man in  $G = A_9$ ,  $H = P \in \text{Syl}_3(G)$ . Dort erfüllt der Konstituent der Dimension 27 des Permutationsmoduls  $K_P^G$  die Voraussetzungen und korrespondiert zu einem Charakter von  $\mathfrak{E}^K$ , der modulo  $\pi$  projektiv einfach ist, obwohl er selbst nicht diese Eigenschaft hat.

Allerdings kann man in (d) auf die Voraussetzung „ $\text{Hom}_{kG}(k_H^G, \overline{X}_1)$  einfach“ nicht verzichten, wie man an dem Beispiel  $G = M_{23}$ ,  $H = M_{22}$  in Charakteristik 2 sieht. Der gewöhnliche Permutationsmodul zerfällt in die beiden direkten Summanden

$$K_H^G = 1 \oplus 22.$$

In Charakteristik 2 zerfällt  $k_H^G$  in

$$k_P^G = 1 \oplus 22 = 1 \oplus \begin{matrix} 11 \\ 11^* \end{matrix},$$

wobei  $11^*$  den zu 11 dualen Modul bezeichnet.

### 2.9.3 Bemerkung

Wie in der letzten Bemerkung festgestellt, korrespondieren Defekt-0-Charaktere in  $G$ , die Konstituenten des Permutationscharakters sind, zu Defekt-0-Charakteren in  $\text{End}_{KG}(K_H^G)$ . Wegen der Nakayama-Frobenius-Relationen (vgl. [Lan83, Cor. II.1.4] ) folgt, dass jeder Defekt-0-Charakter Konstituent des Permutationsmoduls  $K_P^G$  ist.

Fixieren wir nun eine  $p$ -Sylowgruppe  $P$  von  $G$ , so lässt Bemerkung 2.1.7 folgenden Schluss über die Vielfachheit und die Dimension eines solchen Moduls zu. Es sei  $\chi \in \text{Irr}_{\mathfrak{e}K}(G)$  ein Defekt-0-Charakter von  $G$ , der zum gewöhnlichen Charakter  $\mu$  von  $\text{End}_{KG}(K_P^G)$  korrespondiere und der  $\chi(1) = |P| \cdot t$  erfülle. Dann ist die Dimension von  $\mu$  nach Bemerkung 2.1.7 genau  $\mu(\mathfrak{a}_1) = t$ . Andererseits korrespondiert  $\mu$  zu einem Block der Form  $K^{t \times t}$ . Daher schließen wir, dass der zu  $\mu$  gehörige  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$ -Modul die Dimension  $t$  hat (was schon aus Bemerkung 2.1.7 bekannt war) und mit Vielfachheit  $t$  in der Zerlegung von  $k_P^G$  in unzerlegbare direkte Summanden vorkommt.

Beachte übrigens folgende offensichtliche aber durchaus nützliche Beobachtung. Falls ein irreduzibler gewöhnlicher Konstituent von  $1_H^G$  mit der Vielfachheit 1 vorkommt, so hat der korrespondierende gewöhnliche  $\text{End}_{KG}(K_H^G)$ -Charakter den Grad 1 und ist stets irreduzibel modulo  $\pi$ . Umgekehrt muss jedoch nicht jeder einfache  $\text{End}_{KG}(K_P^G)$ -Modul, der modulo  $\pi$  einfach bleibt, zu einem einfachen gewöhnlichen Charakter von  $KG$  korrespondieren, der auch nach Reduktion modulo  $\pi$  irreduzibel bleibt. Vergleiche zum Beispiel  $G = A_6$ ,  $P \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $p = 2$ . Dort kommen die 5-dimensionalen Konstituenten des gewöhnlichen Permutationscharakters mit Vielfachheit 1 vor, aber sind modulo 2 nicht irreduzibel.

Die Datensammlung im letzten Kapitel dieser Arbeit ermöglicht in gewisser Weise einen Vergleich der Eigenschaften der Zerlegungsmatrix einer Gruppe  $G$  und des Endomorphismenrings der Form  $\text{End}_{KG}(K_P^G)$  für eine  $p$ -Sylowgruppe  $P$  von  $G$ . Der größte augenscheinliche Unterschied liegt wohl in den Formaten der Matrizen. Aussagen aus der modularen Darstellungstheorie der endlichen Gruppen wie  $|\text{IBr}(G)| \leq |\text{Irr}(G)|$  sind bei Endomorphismenringen von Permutationsmoduln nicht mehr gültig.

Wir finden bei Endomorphismenringen alle Größenbeziehungen in den Formaten der Zerlegungsmatrizen. So hat für  $G = A_5$ ,  $H = P \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $p = 2$  die Zerlegungsmatrix des Endomorphismenrings  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  vier Spalten und drei Zeilen, für  $P \in \text{Syl}_5(G)$ ,  $p = 5$  drei Spalten und vier Zeilen und für  $P \in \text{Syl}_3(G)$ ,  $p = 3$  fünf Spalten und fünf Zeilen. Dabei ist im letzten Beispiel die Algebra nicht halbeinfach, wie wir es aus der Darstellungstheorie für Gruppen kennen.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Zerlegungsmatrizen der beiden Algebrentypen ist der Rang der Zerlegungsmatrix. Während die Zerlegungsmatrizen von Gruppenringen vollen Rang haben, gibt es mehrere Beispiele von Endomorphismenringen, deren Zerlegungsmatrizen keinen vollen Rang haben. Vergleiche dazu die Beispiele  $G = A_7$ ,  $P \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $p = 2$  und  $G = A_9$ ,  $P \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $p = 2$ .

Die von uns untersuchten Beispiele haben nur die Einträge 0,1,2, wobei nicht auszuschließen ist, dass die Anzahl der berechneten Zerlegungsmatrizen schlicht zu klein ist, um allgemeingültige Aussagen treffen zu können.

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir einen speziellen Fall herauspicken und in Hinsicht auf Zerlegungsmatrizen analysieren. Ist nämlich die Ordnung der Untergruppe  $H$  teilerfremd zu  $p$ , dann können wir den Endomorphismenring auch als kondensierte Gruppenalgebra  $\mathfrak{e}_H kG \mathfrak{e}_H$  betrachten. Hier ist  $\mathfrak{e}_H := |H|^{-1} \sum_{x \in H} x \in \mathcal{O}G$ . Wir zerlegen das Idempotent  $\mathfrak{e}_H$  in eine Summe  $\sum_i \mathfrak{e}_i$  von unzerlegbaren paarweise orthogonalen Idempotenten  $\mathfrak{e}_i \in \mathcal{O}G$ . Dann ist der projektive Modul  $\mathfrak{e}_H \mathcal{O}G = \sum_i \mathfrak{e}_i \mathcal{O}G$  als Summe von PIMs von  $\mathcal{O}G$  dargestellt. Insbesondere entsteht die Zerlegungsmatrix von  $\mathfrak{e}_H \mathcal{O}G \mathfrak{e}_H$  aus der Zerlegungsmatrix  $\mathcal{O}G$  durch Streichen solcher Spalten, für die der zugehörige PIM nicht in der Zerlegung von  $\mathfrak{e}_H \mathcal{O}G$  vorkommt.

## 2.10 Projektivitätskriterien

Es seien wie bisher  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$ . Für eine Primzahl  $p$  sei  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares Zerfallungssystem und  $\mathfrak{p}$  das eindeutig bestimmte maximale Ideal von  $\mathcal{O}$ , das von  $\pi$  erzeugt sei. Schließlich seien  $\theta_H^G$  der Permutationsmodul über  $\theta \in \{K, \mathcal{O}, k\}$  und  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_H^G)$ ,  $\mathfrak{E}^K := \text{End}_{KG}(K_H^G)$  sowie  $\mathfrak{E}^k := \text{End}_{kG}(k_H^G)$ . Die Standardbasis von  $\mathfrak{E}^K$  aus Satz 2.1.22 sei wie bisher mit  $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_d\}$  bezeichnet.

Im Gruppenring  $KG$  ist ein einfacher Modul mit korrespondierendem Charakter  $\chi$  genau dann projektiv einfach nach Reduktion modulo  $\pi$ , wenn  $p$  nicht den Term  $|G|/\chi(1)$  teilt. Wir untersuchen im Folgenden die Frage, ob wir mittels der Charaktertafel von  $\mathfrak{E}^K$  ähnliche Aussagen treffen können.

In den Abschnitten 2.8 und 2.6 haben wir schon Darstellungen der zentral primitiven Idempotenten von  $\mathfrak{E}^K$  gefunden, die wir hier nochmal wiedergeben wollen. Für einen irreduziblen Charakter  $\mu \in \text{Irr}_K(\mathfrak{E}^K)$  gilt für das dazu gehörige zentral primitive Idempotent von  $\mathfrak{E}^K$  mit den Bezeichnungen aus den entsprechenden Abschnitten:

$$\mathfrak{e}_\mu = \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{l=1}^d \frac{1}{k_l} \mu(\mathfrak{a}_l) \mathfrak{a}_{l^*} = \frac{\chi(1)}{|G:H|} \sum_{l=1}^d \mu(\mathfrak{a}_l) \mathfrak{a}_l^\vee = \frac{1}{c_\mu} \sum_{l=1}^d \mu(\mathfrak{a}_l) \mathfrak{a}_l^\vee, \quad (2.5)$$

wobei  $c_\mu$  das Schur-Element von  $\mu$  bezeichnet (vergleiche Satz 2.6.1). Beachte, dass sich jedes zentral primitive Idempotent von  $\mathfrak{E}$  eindeutig als Summe von zentral primitiven Idempotenten von  $\mathfrak{E}^K$  schreiben läßt.

### 2.10.1 Satz

*Es seien die Bezeichnungen wie zu Beginn des Abschnitts und  $\nu$  die zu  $\mathcal{O}$  gehörige Bewertung von  $K$ . Weiter seien  $\mu \in \text{Irr}(\mathfrak{E}^K)$  und  $\chi \in \text{Irr}(KG)$  der zu  $\mu$  korrespondierende irreduzible Charakter von  $KG$ . Dann ist  $\mu$  nach Reduktion modulo*

$\pi$  genau dann projektiv einfach, wenn  $\bar{\mu}$  einfach ist und

$$\nu \left( \frac{\chi(1)}{|G:H|} \right) + \nu \left( \frac{\mu(\mathfrak{a}_i)}{k_i} \right) \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq d$$

gilt.

**Beweis:** Ein zu  $\bar{\mu}$  gehöriger einfacher  $\mathfrak{E}^k$ -Modul  $M_{\bar{\mu}}$  ist genau dann projektiv, wenn nur  $M_{\bar{\mu}}$  und der zu  $\mu$  gehörige  $\mathfrak{E}^K$ -Modul  $M_{\mu}$  im zugehörigen Block  $B_{\mu}$  von  $\mathfrak{E}$  liegen. Dazu ist äquivalent, dass das zu  $\mu$  gehörige Idempotent  $\varepsilon_{\mu}$  bereits ein Element in  $\mathfrak{E}$  ist. Denn zum einen ist die Zerlegung von  $\text{id}_{\mathfrak{E}^K}$  in zentral primitive Idempotenten nach Bemerkung 1.2.14 eindeutig bestimmt. Andererseits ist  $\varepsilon_{\mu} \in Z(\mathfrak{E}) \subseteq Z(\mathfrak{E}^K)$ . Daher gibt es eine Menge  $\mathcal{T} \subseteq \text{Irr}(\mathfrak{E}^K)$  mit

$$\varepsilon_{\mu} = \sum_{\mu' \in \mathcal{T}} \mathfrak{e}_{\mu'},$$

wobei  $\mathfrak{e}_{\mu'}$  die zu  $\mu'$  gehörigen zentral primitiven Idempotenten von  $\mathfrak{E}^K$  bezeichnen (vergleiche Satz 2.8.2). Weil aber nur ein einfacher Modul zum Block  $B_{\mu}$  gehört, ist  $\mathcal{T} = \{\mu\}$ . Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\mathfrak{a}_i$  für  $0 \leq i \leq d$  ist somit  $\varepsilon_{\mu} = \mathfrak{e}_{\mu}$  genau dann erfüllt, wenn in der Darstellung (2.5) des zugehörigen Idempotents jeder Koeffizient schon in  $\mathcal{O}$  liegt.  $\square$

### 2.10.2 Bemerkung

(a) Auf die Eigenschaft Einfachheit in der obigen Formulierung können wir im Allgemeinen nicht verzichten. Betrachten wir dazu wieder das Beispiel  $G = A_5$ ,  $H \in \text{Syl}_2(G)$  und  $p = 2$ . Der Konstituent der Dimension 5 des zugehörigen Permutationsmoduls korrespondiert hier zu einem irreduziblen Charakter  $\mu$  (vom Grad 2) im Endomorphismenring. Das zugehörige zentrale Idempotent von  $\mathfrak{E}^K$  ist bereits ein Element von  $\mathfrak{E}$ . Aber  $\bar{\mu}$  ist nicht einfach, sondern zerfällt in zwei einfache Charaktere vom Grad 1. Wir haben hier einen Block vorliegen, der mehr modulare als gewöhnliche Charaktere hat.

(b) Wir betrachten den trivialen Charakter, der in  $K_H^G$  immer mit Vielfachheit 1 vorkommt. Daher ist der triviale Charakter  $\mu_1$  von  $\mathfrak{E}^K$  modulo  $\pi$  immer irreduzibel und der Test aus Satz 2.10.1 vereinfacht sich zu:  $\mu_1$  ist genau dann projektiv modulo  $\pi$ , wenn  $p \nmid |G:H|$  gilt, wenn  $H$  also eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  enthält. Insbesondere ist in diesem Fall der triviale Charakter von  $\mathfrak{E}^k$  immer projektiv einfach, obwohl der triviale Charakter der Gruppe  $G$  mit  $p \mid |G|$  nie projektiv ist. Beachte, dass dieses Ergebnis auch schon in [Rob94, La. 2.3(iii)] festgehalten wird.

(c) In  $A_7$  modulo 3, mit  $H \in \text{Syl}_3(A_7)$  finden wir ein weiteres Beispiel, bei dem ein  $KG$ -Charakter nicht projektiv einfach modulo  $p$  ist, sein korrespondierender  $\mathfrak{E}^K$ -Charakter jedoch schon. Dort ist der 6-dimensionale Konstituent des Permutationscharakters zu einem 2-dimensionalen Charakter von  $\mathfrak{E}^K$  assoziiert, der projektiv einfach nach Reduktion modulo  $\pi$  ist.

(d) In Korollar 2.9.2(c) haben wir bereits gesehen, dass die Defekt-0-Eigenschaft eines Charakters  $\chi \in \text{Irr}(KG)$  hinreichend ist, damit der korrespondierende Charakter  $\mu$  von  $\mathfrak{E}^K$  projektiv einfach nach Reduktion modulo  $\pi$  ist. Zusammen mit dem Ergebnis von Satz 2.10.1 schließen wir aus  $\nu(|G|/\chi(1)) = 0$ , dass in diesem Fall

$$\nu\left(\frac{\mu(\mathfrak{a}_i)}{k_i}\right) \geq -\nu(|H|) \text{ für alle } 1 \leq i \leq d$$

gilt. Nach Lemma 2.1.15 ist  $k_i = |H|^{-1}|D_i|$ , so dass wir schließlich in diesem Fall

$$\nu(|D_i|) - 2\nu(|H|) \leq \nu(\mu(\mathfrak{a}_i))$$

für alle  $1 \leq i \leq d$  erhalten.

(e) Ist  $H$  ein Normalteiler  $H$  von  $G$ , so ist  $\mathfrak{E}$  isomorph zum Gruppenring  $\mathcal{O}G/H$ . In diesem Fall sind alle Valenzen  $k_i = 1$  und das Kriterium aus Satz 2.10.1 reduziert sich zum Test

$$\nu\left(\frac{\mu(\mathfrak{a}_i)\chi(1)}{|G:H|}\right) \geq 0$$

für alle  $1 \leq i \leq d$ . Weil sich jedes Blockidempotent von  $\mathcal{O}G/H$  eindeutig als Summe der zentral primitiven Idempotenten  $\mathfrak{e}_\mu$  von  $KG/H$  darstellen lässt, kann nicht  $\mu(\mathfrak{a}_i)\mu(x)/|G:H| \in \pi\mathcal{O}$  für alle  $x \in G/H$  gelten. Wir finden also ein Element  $\mathfrak{a}_i \in G/H$  mit  $\nu(\mu(\mathfrak{a}_i)) = 0$ . Damit reduziert sich unser Test zum bekannten Defekt-0-Test für Gruppen.

## Kapitel 3

# Alperins Gewichtsvermutung

Diese Arbeit ist motiviert durch Alperins Gewichtsvermutung, die wir in diesem Kapitel zusammen mit den nötigen theoretischen Konzepten formulieren werden. Dazu wird im ersten Abschnitt die Green-Korrespondenz wiederholt, denn durch sie wird die Verbindung zwischen Permutationsmoduln und so genannten Gewichten geknüpft. Mit Hilfe der Fitting-Korrespondenz gelingt dann die Kopplung zu den Endomorphismenringen von Permutationsmoduln auf den Nebenklassen einer  $p$ -Sylowgruppe. Alperin selbst hat im Zusammenhang mit der Gewichtsvermutung angeregt, diese Endomorphismenringe genauer zu untersuchen.

Weil Vertizes von Gewichtsmoduln in Beziehung zu Defektgruppen von Blöcken der zu Grunde liegenden Gruppe stehen, wird im zweiten Abschnitt die nötige Blocktheorie einschließlich Brauers erstem Hauptsatz und dem Satz von Knörr zitiert. Schließlich formulieren wir im dritten Abschnitt Alperins Gewichtsvermutung und diskutieren wichtige strukturelle Merkmale von Gewichten. Das Kapitel endet mit dem vierten Abschnitt, in dem der Endomorphismenring als quasi-Frobenius vorausgesetzt wird. Wie J. A. Green in [Gre78] bewiesen hat, sind dann die Sockel der PIMs des Endomorphismenrings einfache Moduln und stehen in Bijektion zu den einfachen Moduln der zugrunde liegenden Gruppenalgebra. Dadurch reduziert sich der Beweis von Alperins Gewichtsvermutung in diesem Fall zum Beweis einer Gleichheit in einer Ungleichung.

Übrigens sind es genau die Ergebnisse von J. A. Greens Arbeit, die uns bewogen haben, im allgemeinen Fall die Sockel der PIMs im Endomorphismenring näher zu untersuchen. Dies hat letztlich zu einer Vermutung geführt, die im fünften Kapitel formuliert wird und möglicherweise zu einem neuen Ansatz im Beweis der Gewichtsvermutung führt.

### 3.1 Green-Korrespondenz

In diesem Abschnitt fixieren wir eine Gruppe  $G$  und einen Hauptidealring  $\mathcal{R}$ , so dass für alle Untergruppen  $H \leq G$  im Gruppenring  $\mathcal{R}H$  der Satz von Krull-Schmidt gültig ist. Weiterhin sei  $p$  eine Primzahl. Für eine  $p$ -Untergruppe  $Q$  legen wir folgende Bezeichnungen fest:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &:= \{P \leq G : P \leq_G Q^x \cap Q \text{ für ein } x \in G \setminus H\}, \\ \mathfrak{Y} &:= \{P \leq G : P \leq_G Q^x \cap N_G(Q) \text{ für ein } x \in G \setminus H\}, \\ \mathfrak{Z} &:= \{P \leq Q : P \notin_G \mathfrak{X}\}. \end{aligned}$$

Die Beweise der Green-Korrespondenz werden vor allem auf den Satz von Mackey gestützt, den wir wegen seiner großen Bedeutung hier aufnehmen wollen.

#### 3.1.1 Satz (Satz von Mackey, vgl. [NT89, Thm. III. 1.9])

Es seien  $H, L \leq G$  Untergruppen von  $G$  und  $M$  ein  $\mathcal{R}H$ -Modul. Weiter sei  $[H \setminus G / L]$  ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen von  $H$  und  $L$  in  $G$ . Dann zerlegt sich der  $\mathcal{R}G$ -Modul  $(M^G)_L$  wie folgt.

$$(M^G)_L \cong \bigoplus_{t \in [H \setminus G / L]} (M_{H^t \cap L}^t)^L,$$

wobei  $M^t$  den mit  $t$  konjugierten Modul  $M$  bezeichnet. □

#### 3.1.2 Definition (relativ projektiv)

Es seien  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$  und  $U$  ein  $\mathcal{R}G$ -Gitter.

- (a) Dann heißt  $U$  **relativ  $H$ -projektiv**, falls ein  $\mathcal{R}H$ -Gitter  $V$  mit  $U \mid V^G$  existiert.
- (b) Es sei  $\mathcal{V}(U) := \{H \leq G : U \text{ ist relativ } H\text{-projektiv}\}$ .

#### 3.1.3 Definition und Bemerkung (Vertex)

Es sei  $U$  ein unzerlegbares  $\mathcal{R}G$ -Gitter und  $Q$  ein Element kleinster Ordnung in  $\mathcal{V}(U)$ . Dann gilt  $Q \leq_G H$  für alle  $H \in \mathcal{V}(U)$ . Wir nennen  $Q$  einen **Vertex von  $U$**  und bezeichnen die Menge aller Vertizes von  $U$  mit  $\text{vtx}(U)$ .

**Beweis:** [Alp87, Thm. 9.4, p. 66]. □

#### 3.1.4 Bemerkung

Es sei  $\text{char}(\mathcal{R}) =: p > 0$ . Ist  $H$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $p \nmid |G : H|$ , dann ist jeder  $\mathcal{R}G$ -Modul relativ  $H$ -projektiv. Insbesondere ist jeder  $\mathcal{R}G$ -Modul relativ  $P$ -projektiv für  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Damit ist klar, dass Vertizes  $p$ -Gruppen von  $G$  sind.

**3.1.5 Definition und Bemerkung (Quelle, vgl. [Alp87, Thm. 9.4])**

Es sei  $U$  ein unzerlegbares  $\mathcal{R}G$ -Gitter mit Vertex  $Q$ . Dann gibt es einen bis auf Konjugation in  $N_G(Q)$  eindeutigen unzerlegbaren  $\mathcal{R}Q$ -Modul  $S$  mit  $U \mid S^G$ . Den Modul  $S$  nennen wir **eine Quelle von  $U$** .  $\square$

**3.1.6 Bemerkung ([Alp87, p. 67])**

Wir nehmen an, dass  $\text{char}(\mathcal{R}) =: p > 0$  gilt. Es sei  $\mathcal{R}_G$  der triviale  $\mathcal{R}G$ -Modul. Dann ist eine  $p$ -Sylow-Gruppe von  $G$  Vertex von  $\mathcal{R}_G$ .  $\square$

Mit Hilfe der obigen Bezeichnungen und Definition können wir Greens Resultat formulieren:

**3.1.7 Satz (Green-Korrespondenz)**

Es seien  $\text{char}(\mathcal{R}) = p > 0$ , und  $Q \leq G$  eine  $p$ -Untergruppe. Zudem sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $N_G(Q) \leq H \leq G$ . Dann gibt es eine Bijektion  $f$  von der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren  $\mathcal{R}G$ -Gitter mit Vertex in  $\mathfrak{Z}$  in die Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren  $\mathcal{R}H$ -Gitter mit Vertex in  $\mathfrak{Z}$ , die Folgendes erfüllt: Es seien  $U$  ein unzerlegbares  $\mathcal{R}G$ -Gitter und  $V$  ein unzerlegbares  $\mathcal{R}H$ -Gitter jeweils mit Vertex in  $\mathfrak{Z}$ . Dann gilt:

- (a)  $U$  und  $f(U)$  haben einen gemeinsamen Vertex in  $\mathfrak{Z}$ .
- (b)  $U_H \cong f(U) \oplus Z$ , wobei jeder unzerlegbare direkte Summand von  $Z$  ein  $\mathcal{R}H$ -Gitter ist, das relativ  $H'$ -projektiv ist für eine Untergruppe  $H' \in \mathfrak{Z}$ .
- (c)  $V$  und  $f^{-1}(V)$  haben einen gemeinsamen Vertex in  $\mathfrak{Z}$ .
- (d)  $V^G \cong f^{-1}(V) \oplus W$ , wobei jeder unzerlegbare direkte Summand von  $W$  ein  $\mathcal{R}G$ -Gitter ist, das relativ  $H''$ -projektiv für eine Untergruppe  $H'' \in \mathfrak{X}$  ist.

In diesem Fall ist  $f(U)$  der **Green-Korrespondent von  $U$  in  $H$**  und  $f^{-1}(V)$  der **Green-Korrespondent von  $V$  in  $G$** .

**Beweis:** Vgl. [NT89, Thm. IV. 4.4.3].  $\square$

Folgendes bemerkenswerte Resultat ist als Burry-Carlson-Puig-Theorem bekannt:

**3.1.8 Satz (Burry-Carlson-Puig-Theorem)**

Es seien  $U$  ein unzerlegbarer  $\mathcal{R}G$ -Modul und  $Q$  eine  $p$ -Untergruppe von  $G$ . Falls  $U_{N_G(Q)}$  einen unzerlegbaren direkten Summanden  $V$  mit Vertex  $Q$  hat, so ist  $V$  der Green-Korrespondent von  $U$ . Insbesondere hat  $U$  die  $p$ -Gruppe  $Q$  als Vertex.

**Beweis:** Vgl. [Lan83, Thm. II. 3.10]  $\square$

G. Robinson geht der Frage nach, wann  $k_P^G$  unzerlegbare direkte Summanden mit Vertex  $Q$  für eine gegebene  $p$ -Untergruppe  $Q$  von  $G$  hat. In [Rob88, Thm. 1.2] leitet er hinreichende Bedingungen an  $Q$  her, so dass die Existenz solcher Summanden gesichert ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Hinweis auf die Existenz projektiver unzerlegbarer direkter Summanden von  $k_P^G$ . P. Landrock hat sich in [Lan86] mit der Frage beschäftigt, wann  $k_P^G$  projektive unzerlegbare direkte Summanden hat. Dabei hat er eine Charakterisierung für diese Eigenschaft gefunden, die allein auf der Berechnung von Koeffizienten der Form  $|C \cap xC_P(P \cap P^x)|$  (mit einer Konjugiertenklasse  $C$  von  $G$  und gewissen  $x \in G$ ) beruht. Damit wird die Frage nach der Existenz von projektiven unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  mit rein gruppentheoretischen Größen beantwortet.

## 3.2 Blocktheorie

In diesem Abschnitt seien  $G$  eine Gruppe und  $k$  ein Körper der Charakteristik  $p$ . Wir folgen [Alp87, pp. 96] und betrachten  $kG$  als Modul für die Gruppenalgebra  $k[G \times G]$  mit der Operation

$$g.(x, y) := x^{-1}gy$$

für  $g, x, y \in G$ . Damit sind die Untermoduln von  $kG$  die Ideale von  $kG$  und die unzerlegbaren direkten Summanden von  $kG$  sind genau die Blöcke von  $kG$ . Diese sind als  $k[G \times G]$ -Moduln paarweise nicht isomorph. Wir können  $kG$  zudem in  $k[G \times G]$  durch den diagonalen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \delta : G &\longrightarrow G \times G \\ g &\longmapsto (g, g) \end{aligned}$$

einbetten.

### 3.2.1 Satz (vgl. [Alp87, Thm. 13.4])

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn dieses Abschnitts. Zudem sei  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$ . Dann hat  $\mathbb{B}$  als unzerlegbarer  $k[G \times G]$ -Modul einen Vertex der Form  $\delta(D)$  für eine  $p$ -Untergruppe  $D \leq G$ .  $\square$

### 3.2.2 Definition (Defektgruppe)

Die Bezeichnungen seien wie in Satz 3.2.1. Eine  $p$ -Gruppe  $D$ , so dass  $\delta(D)$  ein Vertex von  $\mathbb{B}$  als  $k[G \times G]$ -Modul ist, heißt **eine Defektgruppe von  $\mathbb{B}$** . Ist  $|D| = p^d$ , so heißt  $d$  **der Defekt von  $\mathbb{B}$** .

Die wichtigsten Eigenschaften von Defektgruppen fassen wir im folgenden Satz zusammen:

### 3.2.3 Satz (vgl. [Alp87, Thm. 13.5, Thm. 13.6, Cor. 14.5])

Es seien  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$  und  $D$  eine Defektgruppe von  $\mathbb{B}$ .

- (a) Ist  $U$  ein unzerlegbarer Modul in  $\mathbb{B}$  mit Vertex  $Q$ , so gilt  $Q \leq_G D$ .
- (b)  $D$  ist der größte Vertex eines unzerlegbaren Moduls in  $\mathbb{B}$ .

- (c) Ist  $P \in \text{Syl}_p(G)$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ , die  $D$  enthält, so gibt es ein Element  $c \in C_G(D)$  mit  $D = P \cap c^{-1}Pc$ .
- (d)  $D$  enthält jede normale  $p$ -Gruppe von  $G$ .
- (e)  $D$  ist der größte  $p$ -Normalteiler von  $N_G(D)$ . □

Aus (b) im vorausgehenden Satz folgt sofort, dass die Defektgruppen des Hauptblocks die  $p$ -Sylowgruppen sind.

Die Vertizes von einfachen Moduln in einem Block  $\mathbb{B}$  erfüllen nach Knörr (siehe [Knö79]) folgende schöne Eigenschaft.

### 3.2.4 Satz (Knörr)

Es sei  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$  mit Defektgruppe  $D$ . Weiterhin sei  $V$  ein einfacher  $kG$ -Modul in  $\mathbb{B}$  mit Vertex  $Q$ . Dann gibt es ein Element  $g \in G$ , so dass

$$C_D(Q^g) \leq Q^g \leq D$$

gilt. Ist  $D$  abelsch, so haben alle einfachen Moduln in  $\mathbb{B}$  Vertex  $D$ . □

Brauers erster Hauptsatz liefert eine Korrespondenz zwischen den Blöcken von  $G$  mit Defektgruppe  $D$  und den Blöcken von  $N_G(D)$  mit Defektgruppe  $D$ . Diese Korrespondenz bedarf weiterer Terminologie, die wir jetzt einführen wollen.

### 3.2.5 Definition

Es seien  $H \leq G$  eine Untergruppe,  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$  und  $b$  ein Block von  $H$ . Wir sagen  $b$  **korrespondiert zu**  $\mathbb{B}$  oder  $b^G$  **ist definiert**, falls gilt:

- (a) Der Block  $b$ , aufgefasst als  $k[H \times H]$ -Modul, ist ein direkter Summand von  $\mathbb{B}_{H \times H}$ .
- (b) Der Block  $\mathbb{B}$  ist der einzige Block mit dieser Eigenschaft.

In diesem Fall benutzen wir die Schreibweise  $\mathbb{B} = b^G$ .

Beachte, dass  $b^G$  im Allgemeinen nicht definiert ist. Jedoch ist das folgende Lemma in vielen Fällen hilfreich.

### 3.2.6 Lemma

Es sei  $b$  ein Block von  $H \leq G$  mit Defektgruppe  $D$ .

- (a) Ist  $b^G$  definiert, so ist  $D$  in einer Defektgruppe von  $\mathbb{B}$  enthalten.
- (b) Gilt  $H \leq L \leq G$  für eine Untergruppe  $L$  von  $G$  und sind  $b^L$ ,  $(b^L)^G$  und  $b^G$  definiert, so gilt  $(b^L)^G = b^G$ .
- (c) Ist  $C_G(D) \leq H$ , so ist  $b^G$  definiert.

**Beweis:** [Alp87, La. 14.1]. □

Jetzt können wir Brauers ersten Hauptsatz formulieren, dessen Beweis auf der Green-Korrespondenz zwischen Blöcken, aufgefasst als  $k[G \times G]$ -Moduln, bzw.  $k[N_G(D) \times N_G(D)]$ -Moduln mit Vertex  $\delta(D)$  beruht.

### 3.2.7 Satz (Brauers erster Hauptsatz)

Es seien  $D$  eine  $p$ -Untergruppe von  $G$  und  $H \leq G$  eine Untergruppe, die  $N_G(D)$  enthält. Dann gibt es eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den Blöcken von  $H$  mit Defektgruppe  $D$  und den Blöcken von  $G$  mit Defektgruppe  $D$ , wobei der Block  $b$  von  $H$  zum Block  $b^G$  von  $G$  korrespondiert.

**Beweis:** [Alp87, Thm. 14.2]. □

Ist  $N \trianglelefteq G$  ein Normalteiler, so können die Blöcke von  $N$  und  $G$  mittels der so genannten „Überdeckung“ in Verbindung gebracht werden.

### 3.2.8 Definition

Es seien ein Normalteiler  $N \trianglelefteq G$ , ein Block  $\mathbb{B}$  von  $G$  und ein Block  $b$  von  $N$  gegeben. Dann sagen wir, dass  $\mathbb{B}$  den Block  $b$  **überdeckt**, falls es einen  $kG$ -Modul gibt, der in  $\mathbb{B}$  liegt und dessen Einschränkung auf  $N$  einen direkten Summanden hat, der in  $b$  liegt.

### 3.2.9 Satz ([Alp93, Thm. 15.1])

Es seien  $N \trianglelefteq G$  ein Normalteiler und  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$ . Dann gilt:

- (a) Die Blöcke von  $N$ , die von  $\mathbb{B}$  überdeckt werden, bilden eine Konjugiertenklasse von Blöcken unter Konjugation von  $G$ .
- (b) Ist  $b$  ein Block von  $kN$ , der von  $\mathbb{B}$  überdeckt wird, so ist jede Defektgruppe von  $b$  der Schnitt einer Defektgruppe von  $\mathbb{B}$  mit  $N$ .
- (c) Es sei  $b$  ein Block, der von  $N$  überdeckt wird. Falls der Zentralisator  $C_G(D)$  einer Defektgruppe  $D$  von  $b$  in  $N$  enthalten ist, so gilt  $b^G = \mathbb{B}$  und  $\mathbb{B}$  ist der einzige Block von  $kG$ , der  $b$  überdeckt. □

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir Kategorien im Zusammenhang mit Blöcken aufgreifen und die Definition von Fusions-System in diesem Zusammenhang geben.

### 3.2.10 Beispiel

Es seien  $p$  eine Primzahl,  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ , und  $P \leq G$  eine  $p$ -Untergruppe.

- (a) Eine **Kategorie auf  $P$**  ist eine Kategorie  $\mathbf{F}$ , deren Objekte die Untergruppen von  $P$  sind und deren Morphismenmengen  $\text{Hom}_{\mathbf{F}}(Q, Q')$  für Untergruppen  $Q, Q' \leq P$  aus injektiven Gruppen-Homomorphismen  $Q \rightarrow Q'$  mit folgenden Eigenschaften bestehen:

- (i) Ist  $Q \leq Q'$ , so ist die Einbettungsabbildung  $Q \rightarrow Q'$  ein Morphismus in  $\mathbf{F}$ .
  - (ii) Für ein beliebiges  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{F}}(Q, Q')$  sind der induzierte Isomorphismus  $Q \cong \varphi(Q)$  und sein Inverses Morphismen von  $\mathbf{F}$ .
  - (iii) Komposition von Morphismen in  $\mathbf{F}$  ist die gewöhnliche Komposition von Gruppenhomomorphismen.
- (b) Ist  $P \in \text{Syl}_p(G)$ , so ist die Kategorie  $\mathbf{F}_P(G)$ , deren Objekte die Untergruppen von  $P$  und deren Morphismen die Menge  $\text{Hom}_{\mathbf{F}_P(G)}(Q, R) := \{\varphi : Q \rightarrow R : \text{es ex. } x \in G \text{ mit } \varphi(u) = x^{-1}ux \text{ f.a. } u \in Q\}$  sind, eine Kategorie auf  $P$ .
- (c) Wir fixieren eine Kategorie  $\mathbf{F}$  auf  $P$ . Wir nennen eine Untergruppe  $Q \leq P$  **vollständig  $\mathbf{F}$ -normalisiert**, falls für alle  $Q'$  mit  $Q' \cong_{\mathbf{F}} Q$  die Abschätzung  $|N_P(Q')| \leq |N_P(Q)|$  gilt.

Dann heißt  $\mathbf{F}$  ein **Fusions-System auf  $P$** , falls gilt:

- (i) Es ist  $\mathbf{F}_P(P) \subseteq \mathbf{F}$ .
- (ii) Für jedes  $Q \leq P$ , das vollständig  $\mathbf{F}$ -normalisiert ist, gilt  $\text{Aut}_P(Q) := \text{Hom}_{\mathbf{F}_P}(Q, Q) \in \text{Syl}_p(\text{Aut}_{\mathbf{F}}(Q))$ .
- (iii) Jeder Morphismus  $\varphi : Q \rightarrow P$ , so dass  $\varphi(Q)$  vollständig  $\mathbf{F}$ -normalisiert ist, erweitert zu einem Morphismus  $\hat{\varphi} : N_{\varphi} \rightarrow P$  in  $\mathbf{F}$ , wobei

$$N_{\varphi} := \{y \in N_P(Q) : \text{es ex. } z \in N_P(\varphi(Q)) \text{ mit } \varphi(y^{-1}uy) = z^{-1}\varphi(u)z \text{ für alle } u \in Q\}. \quad (3.1)$$

Im speziellen Fall  $P \in \text{Syl}_p(G)$  ist  $\mathbf{F}_P(G)$  ein Fusions-System auf  $P$ .

Ein **Brauer-Paar** ist ein Paar  $(Q, b)$ , bestehend aus einer  $p$ -Untergruppe  $Q \leq G$  und einem Block  $b$  von  $kC_G(Q)$ . Auf der Menge der Brauer-Paare operiert  $G$  via Konjugation. J. L. Alperin und M. Broué haben in [AB79] gezeigt, dass man der Menge der Brauer-Paare von  $G$  eine Halbordnung  $\subseteq$  geben kann, die kompatibel mit der Operation von  $G$  ist.

Wir fixieren einen Block  $\mathbb{B}$  von  $G$  mit Defektgruppe  $D$  und wählen einen Block  $b$  von  $kC_G(D)$  mit  $b^G = \mathbb{B}$ . Dann gibt es zu jeder Untergruppe  $Q \leq D$  einen eindeutigen Block  $\tilde{b}_Q$  von  $C_G(Q)$ , so dass  $(1, \mathbb{B}) \subseteq (Q, \tilde{b}_Q) \subseteq (D, b)$  erfüllt ist (vergleiche [AB79] oder [Alp93]).

Dann ist  $\mathbf{F} := \mathbf{F}_D(\mathbb{B}, b)$  die Kategorie auf  $D$ , deren Objekte die Untergruppen von  $D$  sind und deren Morphismen von den Mengen

$$\text{Hom}_{\mathbf{F}}(Q, Q') = \{\varphi : Q \rightarrow Q' : \text{es ex. } x \in G \text{ mit } \varphi(u) = u^x \text{ f.a. } u \in Q, (\tilde{b}_Q)^x = \tilde{b}_{Q'}\} \quad (3.2)$$

gebildet werden, ein Fusions-System auf  $D$  (vergleiche oben), das so genannte **Fusions-System von  $\mathbb{B}$  auf  $D$** . Für den Beweis siehe [AB79]. Eine ausführliche Dokumentation dazu findet man beispielsweise in [Alp93] oder [Lin04].

M. Linckelmann benutzt in [Lin04] diesen abstrakten Zugang, um äquivalente Formulierungen zu Alperins Gewichtsvermutung zu finden.

### 3.3 Alperins Gewichtsvermutung

Wir fixieren eine Gruppe  $G$ . Weiterhin seien eine Primzahl  $p$  und ein algebraisch abgeschlossener Körper  $k$  der Charakteristik  $p$  gegeben.

#### 3.3.1 Definition (Gewicht)

Es sei  $Q$  eine  $p$ -Untergruppe von  $G$ . Ist  $S$  ein einfacher  $kN_G(Q)$ -Modul mit Vertex  $Q$ , so heißt das Paar  $(Q, S)$  ein **Gewicht von  $G$  zu  $Q$** . In diesem Fall nennen wir  $Q$  eine **Gewichtsuntergruppe** und  $S$  einen **Gewichtsmodul**. Darüberhinaus nennen wir den Green-Korrespondenten eines Gewichtsmoduls den **Gewichts-Green-Korrespondenten von  $S$** .

#### 3.3.2 Bemerkung

Die Bezeichnungen seien wie zuvor. Ist  $S$  ein Gewichtsmodul, der zum  $kN_G(Q)$ -Block  $b$  mit Defektgruppe  $D_b$  gehört, so gilt wegen  $Q \leq N_G(Q)$  offensichtlich  $Q \leq D_b$ . Insbesondere folgt

$$C_G(D_b) \leq C_G(Q) \leq N_G(Q).$$

Also ist  $\mathbb{B} := b^G$  definiert. In diesem Fall sagen wir, dass das Gewicht  $(Q, S)$  zu  $\mathbb{B}$  **gehört**.

Auf der Menge der Gewichte gibt es eine Äquivalenzrelation, die durch Konjugation von  $G$  induziert wird. Künftig wollen wir Gewichte stets als Äquivalenzklassen verstehen. Beachte, dass es zu einer  $p$ -Untergruppe  $Q \leq G$  möglicherweise keinen Gewichtsmodul gibt. Aber wir können die  $p$ -Gruppen, die Vertex eines Gewichtsmoduls sind, näher eingrenzen.

#### 3.3.3 Definition

Es sei  $Q$  eine  $p$ -Untergruppe von  $G$ . Dann heißt  $Q$  eine **radikale  $p$ -Untergruppe**, falls  $Q$  der größte  $p$ -Normalteiler in  $N_G(Q)$  ist.

#### 3.3.4 Lemma (vgl. [Szö98, Ch. 6.1])

Falls  $Q$  eine Gewichtsuntergruppe von  $G$  ist, so ist  $Q$  auch  $p$ -radikal. □

#### 3.3.5 Lemma

Es sei  $(Q, S)$  ein Gewicht von  $G$ . Dann gibt es einen Block  $\tilde{b}_Q$  von  $C_G(Q)$ , so dass  $Z(Q)$  eine Defektgruppe von  $\tilde{b}_Q$  ist.

**Beweis:** Wir betrachten die lokale Situation in  $C_G(Q) \leq N_G(Q) \leq G$ . Wie schon oben beobachtet, liegt  $S$  in einem Block  $b$  von  $N_G(Q)$ , so dass  $b^G = \mathbb{B}$  gilt.

Andererseits lässt sich wegen  $C_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$  die Überdeckungstheorie für Blöcke anwenden. Sei  $\tilde{b} := \tilde{b}_Q$  ein Block von  $kC_G(Q)$ , der von  $b$  überdeckt wird. Wir bezeichnen eine Defektgruppe von  $\tilde{b}$  mit  $D_{\tilde{b}}$ . Nach Lemma 3.2.9(b) gibt es eine Defektgruppe  $D_b$  von  $b$  mit  $D_{\tilde{b}} = D_b \cap C_G(Q) \leq D_b$ .

Dann ist  $D_b$  nach Lemma 3.2.6(a) in einer Defektgruppe  $D_{\mathbb{B}}$  von  $\mathbb{B}$  enthalten. Der wichtige Schluss für diesen Beweis beruht auf dem Satz 3.2.4 von Knörr. Denn es gilt

$$D_{\tilde{b}} = D_b \cap C_G(Q) = C_{D_b}(Q) \leq Q.$$

Die letzte Inklusion ist die Anwendung des Satzes von Knörr. Diese Kette liefert einerseits  $D_{\tilde{b}} \leq Q$ , weswegen andererseits mit  $D_{\tilde{b}} = C_{D_b}(Q)$  die Inklusion  $D_{\tilde{b}} \leq Z(Q)$  folgt.

Schließlich folgt  $Z(Q) = D_{\tilde{b}}$  aus  $Z(Q) \trianglelefteq C_G(Q)$ , denn als Normalteiler von  $C_G(Q)$  ist  $Z(Q)$  in jeder Defektgruppe enthalten.  $\square$

### 3.3.6 Definition und Bemerkung (zentrisch)

Es seien  $D \leq G$  eine  $p$ -Gruppe und  $\mathbf{F}_D$  ein Fusions-System auf  $D$  (vergleiche Beispiel 3.2.10). Eine Untergruppe  $Q$  von  $D$  heißt  **$\mathbf{F}_D$ -zentrisch**, wenn  $C_D(Q') = Z(Q')$  für alle  $Q' \cong_{\mathbf{F}_D} Q$  gilt.

### 3.3.7 Lemma ([Kes06, Thm. 2.9])

Es seien  $G$  eine Gruppe,  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$  mit Defektgruppe  $D$ . Wir fixieren einen Block  $\hat{b}$  von  $C_G(D)$ , so dass  $\hat{b}^G = \mathbb{B}$  gilt ([Alp93, Thm. 16.2]) und betrachten das Fusions-System  $\mathbf{F} := \mathbf{F}_D(\mathbb{B}, \hat{b})$  (vergleiche Beispiel 3.2.10). Dann ist eine Untergruppe  $Q \leq D$  genau dann  **$\mathbf{F}$ -zentrisch**, wenn  $Z(Q)$  eine Defektgruppe des eindeutig bestimmten Blocks  $\tilde{b}_Q$  von  $C_G(Q)$  mit  $(1, \mathbb{B}) \subseteq (Q, \tilde{b}_Q) \subseteq (D, \hat{b})$  ist.

Genau diese Eigenschaft bringen Gewichtsgruppen mit, wie die folgende Bemerkung zeigt.

### 3.3.8 Bemerkung ([Lin04, p. 229], [RS90])

Es seien  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$  mit Defektgruppe  $D$  und  $\hat{b}$  ein Block von  $kC_G(D)$  mit  $\hat{b}^G = \mathbb{B}$  ([Alp93, Thm. 16.2]). Ist  $Q \leq D$  eine Gewichtsuntergruppe, dann ist  $Q$  eine  **$\mathbf{F}_D(\mathbb{B}, \hat{b})$ -zentrische** Gruppe und  $\mathbb{B}$  ist der Block von  $kG$ , zu dem die Gewichte mit Vertex  $Q$  gehören.

### 3.3.9 Bemerkung

(a) Die Aussage von Lemma 3.3.5 für den Fall einer abelschen Defektgruppe ist sofort klar.

Ist nämlich  $(Q, S)$  ein Gewicht, das in einem Block  $b$  von  $N_G(Q)$  mit abelscher Defektgruppe  $D_b$  liegt, so gilt mit dem Satz 3.2.4 von Knörr  $Q = D_b$ .

Wir können also die Brauer-Korrespondenz (Satz 3.2.7) anwenden und schließen, dass der Block  $b^G$  von  $G$ , zu dem das Gewicht gehört, auch  $D_b = Q$  als Defektgruppe hat.

Liegt umgekehrt der Green-Korrespondent des Gewichts  $(Q, S)$  in einem Block  $\mathbb{B}$  mit abelscher Defektgruppe  $D$ , dann ist auch die Defektgruppe  $D_b$  des Blocks  $b$  von  $N_G(Q)$ , der  $S$  enthält, abelsch (nach Lemma 3.2.6(a)). Damit gilt  $D = Q = D_b$ . Gewichts-Green-Korrespondenten, die in Blöcken mit abelschem Defekt  $D$  liegen, können also nur Gewichtsmoduln mit Vertex  $D$  haben. Die korrespondierenden Blöcke in  $G$  und  $N_G(D)$  sind dann Brauer-Korrespondenten. Damit folgt für die Untergruppe  $Q$ , dass sie  $\mathbf{F}_D(\mathbb{B}, b)$ -zentrisch ist, wobei  $\mathbb{B}$  der Brauer-Korrespondent von  $b$  ist.

(b) Nach dem Beweis von Lemma 3.3.5 können wir noch folgende Beobachtung aus der Erkenntnis  $D_{\tilde{b}} \leq Q$  anschließen. Wegen  $C_{N_G(Q)}(D_{\tilde{b}}) = N_G(Q) \cap C_G(D_{\tilde{b}}) \geq N_G(Q) \cap C_G(Q) = C_G(Q)$  ist  $\tilde{b}$  genau dann der einzige Block von  $kC_G(Q)$ , der von  $b$  überdeckt wird, wenn Gleichheit gilt, d.h. wenn  $C_G(Q) = C_{N_G(Q)}(D_{\tilde{b}})$  gilt (vergleiche Satz 3.2.9(c)).

Außerdem zeigt die Aussage, dass ein Block von  $kN_G(Q)$  für eine Gewichtsuntergruppe  $Q$ , in  $C_G(Q)$  einen Block mit abelschen Defektgruppen überdeckt.

### 3.3.10 Vermutung (Alperins Gewichtsvermutung)

Die Bezeichnungen seien wie in Definition 3.3.1. Zudem sei  $\mathbb{B}$  ein Block von  $kG$ . Dann ist die Anzahl der Konjugationsklassen von Gewichten, die zu  $\mathbb{B}$  gehören, gleich der Anzahl der Isomorphieklassen von einfachen  $kG$ -Moduln in  $\mathbb{B}$ .

Die Voraussetzungen legen nahe, die Green-Korrespondenz anzuwenden. Ist nämlich  $(Q, S)$  ein Gewicht, so hat der einfache  $kN_G(Q)$ -Modul  $S$  per definitionem  $Q$  als Vertex. Sein Green-Korrespondent  $U$  in  $G$  ist unzerlegbar und hat Vertex  $Q$ . Ist umgekehrt  $U$  ein unzerlegbarer  $kG$ -Modul, dessen Green-Korrespondent in  $kN_G(Q)$  einfach ist, dann ist  $(Q, S)$  ein Gewicht. Da ein Vertex von  $U$  bis auf Konjugation eindeutig ist, gilt Gleiches auch für korrespondierende Gewichte. Daher können wir Alperins Gewichtsvermutung wie folgt umformulieren.

### 3.3.11 Vermutung (Alperins Gewichtsvermutung)

Die Bezeichnungen seien wie in Vermutung 3.3.10. Dann ist die Anzahl der Isomorphietypen von einfachen  $kG$ -Moduln in  $\mathbb{B}$  gleich der Anzahl von Isomorphietypen von unzerlegbaren  $kG$ -Moduln in  $\mathbb{B}$  mit einfachem Green-Korrespondenten im Normalisator ihres Vertex.

Alperin formulierte die Vermutung in [Alp87]. Mittlerweile wurde sie für viele Fälle bewiesen. Dazu gehören

- (a) Blöcke mit zyklischen Defektgruppen ([Alp93, Sec. 19 - Sec. 21];
- (b)  $p$ -auflösbare Gruppen, ([Oku]; [IN95]);

- (c) symmetrische Gruppen ([AF90]);
- (d) endliche Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik ([Cab84]);
- (e) allgemeine lineare Gruppen in nicht definierender Charakteristik ([AF90]);
- (f) viele sporadische Gruppen ([AC95], [An97], [Dad92], [EP99], [Szö98]).

Wir werden im letzten Kapitel eine Fülle von Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln bestimmen. Dort sind vor allem schnelle Tests nützlich, um zu entscheiden, ob eine  $p$ -Gruppe als Vertex eines Gewichtsmoduls überhaupt in Frage kommt. Ein solcher Test ist zum Beispiel das folgende Lemma:

**3.3.12 Lemma (vgl. [Alp87, La. 1])**

*Es sei  $(Q, S)$  ein Gewicht von  $G$ . Dann ist  $S$  auch ein einfacher  $kN_G(Q)/Q$ -Modul und als solcher ist er projektiv. Umgekehrt ist jeder projektiv einfache  $kN_G(Q)/Q$ -Modul ein Gewichtsmodul nach Inflation über  $Q$ .*

**Beweis:** Weil  $S$  ein einfacher  $kN_G(Q)$ -Modul und  $Q$  normal in  $N_G(Q)$  ist, operiert  $Q$  auf  $S$  trivial. Wir können  $S$  also als  $kN_G(Q)/Q$ -Modul betrachten. Als solcher hat er einen trivialen Vertex und ist projektiv. Für die umgekehrte Aussage müssen wir beachten, dass die Inflation von  $S$  nach  $N_G(Q)$  einfach bleibt.  $\square$  Das vorherige Lemma sagt also, dass wir Gewichtsmoduln finden, wenn wir projektiv einfache  $N_G(Q)/Q$ -Moduln finden. Der gewöhnliche Charakter  $\chi$  eines solchen Moduls erfüllt also

$$p \nmid |N_G(Q) : Q|/\chi(1).$$

Vor allem das folgende Lemma ist für diese Arbeit von herausragender Bedeutung, verbindet es doch die Analyse von Permutationsmoduln mit der von Gewichtsmoduln. Bereits in seinem ersten Lemma über Gewichtsmoduln in [Alp87] beweist Alperin folgenden Zusammenhang:

**3.3.13 Lemma (vgl. [Alp87, La. 1])**

*Die Bezeichnungen seien wie in Vermutung 3.3.10. Zudem sei  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ . Ist  $(Q, S)$  ein Gewicht von  $G$ , dann ist sein Green-Korrespondent ein unzerlegbarer direkter Summand von  $k_P^G$ .*

**Beweis:** Für den Beweis halten wir die Bezeichnung  $N := N_G(Q)$  fest. Der Gewichtsmodul  $S$  hat  $Q$  als Vertex. Daher müssen wir nach dem Satz von Burry-Carlson-Puig (Satz 3.1.8) nur noch zeigen, dass  $S$  ein direkter Summand der Einschränkung  $(k_P^G)_N$  ist. Durch geeignete Konjugation können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $Q \subset P$  gilt und dass (durch eventuelle weitere Konjugation)  $P_N := P \cap N$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $N$  ist. Der Satz von Mackey (Satz 3.1.1) zeigt direkt, dass  $k_{P_N}^N$  als direkter Summand in  $(k_P^G)_N$  vorkommt. Nun ist  $Q \subset P_N$  normal in  $N$ , also ist  $k_{P_N}^N$  als  $kN/Q$ -Modul isomorph zum Permutationsmodul  $k_{P_N/Q}^{N/Q}$ . Weil  $S$  ein projektiver  $kN/Q$ -Modul ist, folgt die Behauptung,

wenn wir gezeigt haben, dass  $S$  ein homomorphes Bild von  $k_{P_N/Q}^{N/Q}$  ist. Weil  $P_N/Q$  eine  $p$ -Gruppe ist, gilt  $\text{Hom}_{k_{P_N/Q}}(k_{P_N/Q}^{N/Q}, S) \cong \text{Hom}_{k_{P_N/Q}}(k, S_{P_N/Q}) \neq 0$ . Daraus folgt die Behauptung, weil  $S$  einfach ist.  $\square$

Wir müssen also bei der Bestimmung (der Anzahl) von Gewichts-Moduln entscheiden, welche unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  einen einfachen Green-Korrespondenten in  $N_G(Q)$  haben. Das folgende Lemma ist diesbezüglich für die Berechnungen ein überaus starkes Hilfsmittel.

**3.3.14 Lemma (vgl. [Szö98, Prop. 6.1.5])**

*Es sei  $(Q, S)$  ein Gewicht von  $G$  mit  $p^\alpha = |G : Q|_p$ . Dann ist der  $p$ -Anteil der Dimension des Green-Korrespondenten von  $S$  genau  $p^\alpha$  und dieser ist der einzige unzerlegbare direkte Summand von  $S^G$ , dessen Dimension nicht von  $p^{\alpha+1}$  geteilt wird.*

**Beweis:** Weil  $S$  ein projektiv einfacher  $N_G(Q)/Q$ -Modul ist, gilt  $|N_G(Q) : Q|_p = |\dim(S)|_p$ . Daher gilt für die Dimension des induzierten Gewichtsmoduls

$$|\dim(S^G)|_p = |G : N_G(Q)|_p \cdot |N_G(Q) : Q|_p = |G : Q|_p.$$

Alle vom Green-Korrespondenten von  $S$  verschiedenen unzerlegbaren direkten Summanden von  $S^G$  haben Vertizes, deren Ordnung kleiner als die von  $Q$  ist. Daher beträgt der  $p$ -Anteil der Summe ihrer Dimensionen mindestens  $p^{\alpha+1}$ . Hätte der Green-Korrespondent von  $S$  auch eine durch  $p^{\alpha+1}$  teilbare Dimension, dann auch  $S^G$ , was ein Widerspruch wäre.  $\square$

Im konkreten Fall können wir uns diese Eigenschaft bei unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  zu Nutze machen, deren Dimensionen höhere  $p$ -Potenzen haben als die Gruppenordnung. Solche Moduln sind folglich immer Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten.

In der Situation von Lemma 3.3.14 wollen wir noch den folgenden speziellen Fall betrachten: Ist die Gewichtsuntergruppe  $Q$  eine  $p$ -Sylogruppe von  $G$ , so gilt  $|G : Q|_p = 1$ . Damit haben wegen Lemma 3.3.14 und  $1 = |G : Q|_p = |N_G(Q) : Q|_p$  der Gewichtsmodul und der zugehörige Gewichts-Green-Korrespondent eine zu  $p$  teilerfremde Dimension.

Bemerkenswert ist folgende Beobachtung über die Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten von  $k_P^G$ .

**3.3.15 Bemerkung**

(a) Es sei  $W$  ein unzerlegbarer direkter Summand von  $k_P^G$ . Dann kommt  $W$  in der Zerlegung von  $S^G$  vor, wobei  $S$  ein Gewichtsmodul mit Vertex  $P$  ist. Denn es gilt

$$k_P^G = (k_P^{N_G(P)})^G.$$

Den Modul  $k_P^{N_G(P)}$  können wir als reguläre Darstellung von  $kN_G(P)/P$  auffassen, die insbesondere die projektiv einfachen  $kN_G(P)/P$ -Moduln, also nach Lemma 3.3.12 die Gewichtsmodule von  $kG$  mit Vertex  $P$  umfasst.

So verstanden kommt  $W$  als unzerlegbarer direkter Summand des Permutationsmoduls vor und als Summand in der Induktion eines einfachen  $kN_G(P)$ -Moduls mit Vertex  $P$ . Insbesondere kann es wegen Lemma 3.3.14 keinen Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten geben, dessen Dimension teilerfremd zu  $p$  ist.

Diese Beobachtung können wir in den Beispielen benutzen, in denen es rechnerische Schwierigkeiten beim Induzieren von Gewichtsmodule oder beim Zerlegen von induzierten Gewichtsmodule gibt. Vergleiche etwa  $L_2(13) \bmod 3$  auf Seite 242.

(b) Es seien alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  Gewicht-Green-Korrespondenten mit  $p$ -Sylowgruppen als Vertizes oder projektiv einfach. Zudem nehmen wir an, dass  $P$  kein Normalteiler von  $G$  ist. Dann gibt es mindestens einen projektiv einfachen  $kG$ -Modul. Denn in diesem Fall ist  $k_{N_G(P)}^G = k_G \oplus M$  für einen  $kG$ -Modul  $M \neq 0$ . Jeder unzerlegbare direkte Summand von  $M$  hat nach Lemma 3.3.14 eine durch  $p$  teilbare Dimension und hat als Gewicht-Green-Korrespondent (Voraussetzung) einen Vertex  $Q < P$ . Daher ist nach Voraussetzung jeder solche unzerlegbare direkte Summand von  $M$  ein projektiv einfacher  $kG$ -Modul.

In speziellen Situationen können dann Rückschlüsse auf die Dimension der projektiv einfachen Moduln gezogen werden. Denn die Dimension von  $k_{N_G(P)}^G$  ist  $|G : N_G(P)|$ . Wir haben gerade schon gesehen, dass alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $M$  projektiv einfache  $kG$ -Moduln sind, deren Dimensionen sich zu  $|G : N_G(P)| - 1$  aufaddieren.

Diese Situation tritt in den am Ende abgedruckten Beispielen häufig auf. Betrachte zum Beispiel  $G = A_6$  modulo 3, Seite 150. Hier wird ein Defekt-0-Charakter von Grad 9 erzwungen.

(c) Ist die  $p$ -Sylowgruppe  $P$  von  $G$  ein Normalteiler, so ist der Permutationsmodul  $k_P^G$  isomorph zum rechtsregulären Modul  $(kG/P)_{kG/P}$  und der Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  als  $k$ -Algebra isomorph zum (halbeinfachen) Gruppenring  $kG/P$ . Andererseits haben alle einfachen  $kG/P$ -Moduln eine zu  $p$ -teilerfremde Dimension, so dass nur  $P$  Gewichtsuntergruppe von  $G$  ist. Daher sind die Gewichtsmodule genau die einfachen  $kG$ -Moduln und Alperins Vermutung ist für diesen Fall richtig.

Beachte, dass in diesem Fall jeder unzerlegbare (einfache) direkte Summand von  $k_P^G$  ein Gewichtsmodule mit einer zu  $p$  teilerfremden Dimension ist.

(d) Ein unzerlegbarer direkter Summand  $X$  von  $k_P^G$ , der nicht projektiv einfach ist und dessen Dimension  $|\dim(X)|_p = |\text{Syl}_p(G)|$  erfüllt, ist kein Gewicht-Green-Korrespondent.

Wie schon oben angedeutet, hat Alperin selbst vorgeschlagen, den Endomorphismenring des Permutationsmoduls  $k_P^G$  zu untersuchen um die Gewichtsvermutung

besser zu verstehen. Dies werden wir im Folgenden weiter verfolgen. Alperin hat aber auch auf einen weiteren Ansatz mit gewissen alternierenden Summen hingewiesen. Solche alternierenden Summen werden in einem allgemeinen Zusammenhang von Webb, Quillen, Bouc u.a. untersucht. Die Verbindung dieser Summen zu Alperins Gewichtsvermutung, insbesondere eine äquivalente Formulierung der Gewichtsvermutung mit Hilfe von alternierenden Summen, finden wir in [KR89]. Die darin entwickelten Ideen wurden in zahlreichen weiteren Arbeiten weiterverfolgt, in der Hoffnung, Alperins Gewichtsvermutung auf die einfachen Gruppen reduzieren zu können. Dieser Ansatz wird hier nicht aufgegriffen, wenngleich sich seine Stärke in der Verbindung zu vielen anderen Theoremen und offenen Vermutungen offenbart.

## 3.4 Der quasi-Frobenius-Fall

Die Grundvoraussetzungen und Bezeichnungen dieses Abschnitts seien wie folgt festgelegt: Es seien  $G$  eine Gruppe,  $p$  eine Primzahl und  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ .

Wir wollen in diesem Abschnitt das oft zitierte Paper „On a Theorem of H. Sawada“ ([Gre78]) von J. A. Green in Hinsicht auf Alperins Vermutung diskutieren. Deswegen werden wir auch auf die Allgemeinheit des Papers in Bezug auf Charakteristik und die auftretende Untergruppe verzichten und direkt unsere spezielle Situation vorgeben.

### 3.4.1 Bemerkung

Es sei  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ . Wir fixieren den Permutationsmodul  $W := k_P^G$ . Beachte, dass dieser Modul von dem Element  $w_0 := \sum_{x \in P} x$  erzeugt wird. Zudem sei der  $kG$ -Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(W)$  von  $W$  mit  $\mathfrak{E}^k$  bezeichnet. Es seien  $\text{mod-}kG$  die Kategorie der endlich erzeugten  $kG$ -Moduln und  $k\text{-mod}$  die Kategorie der endlich-dimensionalen  $k$ -Vektorräume. Wir folgen [Gre78] und betrachten den kovarianten und links-exakten Funktor  $\mathcal{F} : \text{mod-}kG \rightarrow k\text{-mod}$  mit folgender Abbildungsvorschrift: Für  $M \in \text{mod-}kG$  sei

$$\mathcal{F}(M) := \{m \in M : mx = m \text{ für alle } x \in P\} = \text{Fix}_P(M)$$

die Fixpunktmenge von  $M$  unter  $P$  (vergleiche Bemerkung 2.1.2).

Für  $M, M' \in \text{mod-}kG$  und  $\varphi \in \text{Hom}_{kG}(M, M')$  sei

$$\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M'),$$

die Restriktion von  $\varphi$  auf  $\mathcal{F}(M)$ . Beachte, dass  $\mathcal{F}(M)$  und  $\text{Hom}_{kG}(W, M)$  als  $k$ -Vektorräume via der folgenden Abbildung  $\tau$  isomorph sind:

$$\begin{aligned} \tau : \quad \mathcal{F}(M) &\rightarrow \text{Hom}_{kG}(W, M) \\ m &\mapsto \lambda_m : (w_0 x \mapsto mx), \end{aligned}$$

für alle  $x \in kG$ . (Indem man die  $k$ -Basis  $\{w_0y_1, w_0y_2, \dots, w_0y_n\}$  mit einer Transversalen  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  von  $P \setminus G$  betrachtet, kann man zeigen, dass  $\lambda_m$  für alle  $m \in M$  wohldefiniert ist.)

Damit gelingt es,  $\mathcal{F}(M)$  eine (Rechts-)  $\mathfrak{E}^k$ -Modulstruktur zu geben: Für  $m \in \mathcal{F}(M)$  und  $\alpha \in \mathfrak{E}^k$  sei  $m \cdot \alpha$  das eindeutige Element aus  $\mathcal{F}(M)$ , für das  $\lambda_{m \cdot \alpha} = \lambda_m \alpha$  gilt. Beachte, dass es reicht,  $\alpha(w_0)$  zu berechnen, um  $m \cdot \alpha$  zu bestimmen: Es sei  $x_\alpha \in kG$  ein Element, für das  $\alpha(w_0) = w_0x_\alpha$  gilt. Dann ist

$$\tau(m \cdot \alpha)(w_0) = \lambda_m(w_0x_\alpha) = mx_\alpha.$$

Weil  $\tau$  ein Isomorphismus ist folgt aus der letzten Gleichung  $m \cdot \alpha = mx_\alpha$ .

Im speziellen Fall  $M = W = k_P^G$ , ist  $\mathcal{F}(W)$  als  $k$ -Vektorraum mittels  $\tau$  isomorph zum Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(W) = \mathfrak{E}^k$ . Der Modul  $\mathcal{F}(W)$  hat also eine  $\mathfrak{E}^k$ -Rechtsstruktur, wie gerade beschrieben, und eine natürliche  $\mathfrak{E}^k$ -Linksstruktur, nämlich  $\alpha w = \alpha(w)$  für alle  $w \in \mathcal{F}(W)$ .

### 3.4.2 Lemma

Mit den Bezeichnungen von oben gilt:  $\mathcal{F}(W)$  ist mittels  $\tau$  isomorph zu  $\mathfrak{E}^k$  als  $\mathfrak{E}^k$ -Modul und als  $\mathfrak{E}^k$ -Linksmodul.

**Beweis:** Es reicht, die  $\mathfrak{E}^k$ -Modulstruktureigenschaft an dem erzeugenden Element  $w_0 \in W$  zu zeigen. Für  $\alpha \in \mathfrak{E}^k$  sei  $x_\alpha \in kG$ , so dass  $\alpha(w_0) = w_0x_\alpha$  gilt. Dann folgt:

$$\tau(\alpha(w_0))(w_0) = \tau(w_0x_\alpha)(w_0) = w_0x_\alpha = \alpha(w_0) = \alpha(\tau(w_0)(w_0)).$$

Für die Rechts-Modul-Eigenschaft rechnen wir wie folgt:

$$\tau(w_0 \cdot \alpha)(w_0) = \lambda_{w_0}(\alpha(w_0)) = \tau(w_0)(\alpha(w_0)) = \alpha(\tau(w_0))(w_0).$$

□

Wie in Abschnitt 2.9 betrachten wir die Zerlegung

$$W = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{n_i} W_{ij}$$

von  $W$  in unzerlegbare direkte Summanden; dabei gelte  $W_{ij} \cong W_{kl}$  genau dann, wenn  $i = k$  ist. Mit der Fitting-Korrespondenz (Satz 1.2.5) ist dann

$$\mathcal{F}(W) = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathcal{F}(W_{ij})$$

eine Zerlegung von  $\mathfrak{E}^k$  in unzerlegbare direkte Summanden von  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{E}^k}^k$ , also eine Zerlegung in PIMs von  $\mathfrak{E}^k$ .

Bevor wir die Hauptaussagen der Arbeit von J. A. Green formulieren, wollen wir noch folgendes Lemma daraus zitieren:

### 3.4.3 Lemma ([Gre78, La. 2.2a])

Es sei  $M$  ein einfacher  $kG$ -Modul. Dann ist  $M$  genau dann ein direkter Summand vom Kopf  $\text{hd}(W) := W/WJ(kG)$  oder von  $\text{soc}(W)$ , wenn  $\mathcal{F}(M) \neq 0$  gilt. Insbesondere besteht die Menge aller direkten Summanden von  $\text{soc}(W)$  und die Menge aller direkten Summanden von  $\text{hd}(W)$  aus allen Isomorphietypen der einfachen  $kG$ -Moduln, weil jeder nicht-triviale  $kP$ -Modul von 0 verschiedene Fixpunkte hat.  $\square$

Die Theoreme aus der Arbeit von J. A. Green lauten nun wie folgt:

### 3.4.4 Satz ([Gre78, Thm. 1])

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn dieses Abschnitts. Zudem sei  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius, d.h.  $\mathfrak{E}^k$  ist injektiv als  $\mathfrak{E}^k$ -(Rechts-)Modul. Dann gilt für beliebige  $1 \leq i, j \leq s$ :

- (a)  $\text{soc}(W_{i,1})$  und  $\text{hd}(W_{i,1})$  sind einfach.
- (b)  $\mathcal{F}(\text{soc}(W_{i,1})) = \text{soc}(\mathcal{F}(W_{i,1}))$ . Insbesondere ist  $\text{soc}(\mathcal{F}(W_{i,1}))$  in  $\text{soc}(W_{i,1})$  als Menge enthalten.
- (c)  $\mathcal{F}(\text{hd}(W_{i,1})) \cong \text{hd}(\mathcal{F}(W_{i,1}))$ .
- (d) Die  $kG$ -Moduln  $W_{i,1}$  und  $W_{j,1}$  sind genau dann isomorph, wenn  $\text{soc}(W_{i,1}) \cong \text{soc}(W_{j,1})$  oder wenn  $\text{hd}(W_{i,1}) \cong \text{hd}(W_{j,1})$  gilt.  $\square$

### 3.4.5 Satz ([Gre78, Thm. 2])

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn dieses Abschnitts. Zudem sei  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius. Dann induziert die Abbildung  $M \rightarrow \mathcal{F}(M)$  eine Bijektion zwischen den einfachen  $kG$ -Moduln und den einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln.  $\square$

Wir wollen dieses Ergebnis in Hinsicht auf Alperins Gewichtsvermutung diskutieren. Sei also  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius. Die Anzahl der Gewichts-Green-Korrespondenten ist höchstens gleich der Anzahl  $s$  der Isomorphietypen der unzerlegbaren direkten Summanden von  $W$  (Lemma 3.3.13). Nach dem Satz von Fitting (Satz 1.2.5) hat  $\mathfrak{E}^k$  auch  $s$  verschiedene Isomorphietypen von einfachen Moduln. Nach den obigen Ergebnissen gibt es aber eine eindeutige Korrespondenz zwischen den einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln und den einfachen Sockeln der unzerlegbaren direkten Summanden von  $W$ . Daher gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} |\{\text{Gewichte}\}| &\leq |\{\text{unzerlegbare Summanden in } k_P^G\}| \\ &= |\{\text{Sockelkonstituenten von } \mathfrak{E}^k\}| \\ &= |\{\text{einfache } kG\text{-Moduln}\}|, \end{aligned} \tag{3.3}$$

jeweils bis auf Äquivalenz und Isomorphie. Ist Alperins Vermutung gültig, müssen also  $s$  Gewichts-Green-Korrespondenten vorkommen, d.h. *jeder* unzerlegbare direkte Summand von  $W$  ist ein Gewichts-Green-Korrespondent.

Im umgekehrten Schluss würden wir Alperins Vermutung für die Klasse von Gruppenringen  $kG$  beweisen, für die der Endomorphismenring von  $k_P^G$  mit  $P \in \text{Syl}_p(G)$  quasi-Frobenius ist, wenn wir zeigen könnten, dass in diesem Fall alle direkten Summanden Gewichts-Green-Korrespondenten sind.

Immerhin gibt es Ergebnisse, die zeigen, dass der Green-Korrespondent von  $W_{i,1}$  in  $N_G(Q)$ , wobei  $Q$  ein Vertex von  $W_{i,1}$  ist, ein projektiver  $N_G(Q)/Q$ -Modul ist. Dies untersuchen wir im nächsten Kapitel genauer.

### 3.4.6 Bemerkung

Die Bezeichnungen seien wie oben.

(a) Es sei  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius. Für einen Index  $1 \leq i \leq s$  betrachten wir den PIM  $P_{i,1} \cong \text{Hom}_{kG}(k_P^G, W_{i,1})$  von  $\mathfrak{E}^k$ . Nach Satz 3.4.4 gilt dann

$$\text{soc}(P_{i,1}) = \text{soc}(\text{Hom}_{kG}(k_P^G, W_{i,1})) \cong \text{Hom}_{kG}(k_P^G, \text{soc}(W_{i,1})).$$

Beachte, dass wegen der Einfachheit der PIM-Sockel  $\text{soc}(P_{i,1}) = \langle \varphi \rangle_{\mathfrak{E}^k}$  für jeden von 0 verschiedenen Homomorphismus  $\varphi \in \text{soc}(P_{i,1})$  gilt.

Weil  $\text{soc}(W_{i,1})$  ein einfacher  $kG$ -Modul ist, folgt für jeden Homomorphismus  $0 \neq \varphi \in \text{Hom}_{kG}(k_P^G, \text{soc}(W_{i,1}))$ :

$$\varphi(k_P^G) = \text{soc}(W_{i,1}).$$

Unter der Annahme, dass  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius ist, finden wir demnach eine Abbildung von der Menge der einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln in die Menge der einfachen  $kG$ -Moduln, die eine Korrespondenz zwischen den Isomorphietypen der einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln und den Isomorphietypen der einfachen  $kG$ -Moduln etabliert.

(b) Der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  erfülle nur die schwächere Voraussetzung, dass alle Sockel der PIMs von  $\mathfrak{E}^k$  einfach sind. Zudem nehmen wir an, dass auch alle Sockel der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  einfach sind. Dann gilt für alle unzerlegbaren direkten Summanden  $X \mid k_P^G$ :

$$\text{soc}(\mathcal{F}(\text{soc}(X))) = \text{soc}(\mathcal{F}(X)) \subseteq \mathcal{F}(\text{soc}(X)).$$

Denn nach Voraussetzung ist  $\text{soc}(X)$  einfach, so dass  $\mathcal{F}(\text{soc}(X)) \neq 0$  nach Lemma 3.4.3 gilt und offensichtlich in  $\mathcal{F}(X)$  enthalten ist. Daher gilt nach [NT89, 3a. I 8.20]  $\text{soc}(\mathcal{F}(\text{soc}(X))) = \text{soc}(\mathcal{F}(X)) \cap \mathcal{F}(\text{soc}(X))$ .

Wegen der Einfachheit der Sockel der PIMs von  $\mathfrak{E}^k$  gilt damit  $\text{soc}(\mathcal{F}(\text{soc}(X))) = \text{soc}(\mathcal{F}(X)) \subseteq \mathcal{F}(\text{soc}(X))$ .

Ein Beispiel (unter vielen), das diese Voraussetzungen erfüllt, ist  $L_2(13)$  in Charakteristik 2.

(c) Der Operator  $\mathcal{F}$  hat nicht die Eigenschaft, Halbeinfachheit von Moduln zu erhalten, wie wir es beispielsweise vom Kondensationsfunktorkennen. Man betrachte beispielsweise  $G = M_{11}$  in Charakteristik 2. Dort hat der Permutationsmodul  $k_P^G$  einen einfachen direkten Summanden der Dimension 10. Der korrespondierende PIM von  $\mathfrak{E}^k$  hat zwei 1-dimensionale Konstituenten und ist somit nicht halbeinfach.  $\square$

Eine wichtige Klasse von Gruppen  $G$ , deren Endomorphismenringe  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  quasi-Frobenius sind, bilden die Gruppen mit  $BN$ -Paar.

### 3.4.7 Definition

Es sei  $G$  eine Gruppe.

- (a) Ein Paar  $(B, N)$  von Untergruppen von  $G$  heißt  **$BN$ -Paar von  $G$** , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $G = \langle B, N \rangle$ .
- (ii)  $H := B \cap N \trianglelefteq N$ .
- (iii)  $W := N/H = \langle w_i : i \in I, w_i^2 = 1 \rangle$  für eine Indexmenge  $I$ .
- (iv) Für  $i \in I$  sei  $n_i \in N$  mit  $HN_i = w_i$ . Dann gilt

$$n_i B n_i \subseteq B n_i n_i B \cup B n_i B$$

für alle  $n \in N$ .

- (v) Für alle  $n_i$  wie in (iv) gilt  $n_i B n_i \neq B$ .

In diesem Fall heißt  $G$  **Gruppe mit  $BN$ -Paar**.

- (b) Ein  $BN$ -Paar heißt **zerfallend**, falls es Untergruppen  $U$  und  $T$  gibt, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (i)  $U$  ist eine  $p$ -Gruppe und  $T$  ist eine abelsche  $p'$ -Gruppe, die  $U$  normalisiert.
- (ii) Es gilt  $B = T \rtimes U$  und  $T = B \cap N$ .
- (iii) Es gilt  $\bigcap_{n \in N} n^{-1} B n = T$ .

Die Existenz eines (zerfallenden)  $BN$ -Paares für eine Gruppe  $G$  lässt starke Strukturaussagen zu. Eine davon betrifft den Endomorphismenring von  $k_P^G$ .

### 3.4.8 Satz (Tinberg, [Tin80, Prop. 3.7])

Es sei  $G$  eine Gruppe mit zerfallendem  $BN$ -Paar. Dann ist  $\mathfrak{E}^k := \text{End}_{kG}(k_P^G)$  Frobenius und damit quasi-Frobenius.  $\square$

N. B. Tinberg sagt selbst, dass die Beweisidee auf Green zurückgeht.

M. Cabanes beweist in [Cab84] Alperins Gewichtsvermutung für Gruppen mit zerfallendem  $BN$ -Paar. Er benutzt J.A. Greens Arbeit [Gre78] und die daraus folgende Bijektion zwischen einfachen  $kG$ -Moduln und einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln, um eine Parametrisierung für die einfachen  $kG$ -Moduln und für die Gewichte von  $G$  zu finden.

### 3.4.9 Satz (Cabanes, [Cab84, Prop C12.1 6])

Es seien  $G$  eine Gruppe mit zerfallendem  $BN$ -Paar,  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Dann ist jeder unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$  ein Gewichts-Green-Korrespondent.  $\square$

Im Vorgriff auf Kapitel 4 sei bemerkt, dass M. Cabanes für jeden unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  mit Vertex  $Q$  zeigt, dass sein Bild unter dem Brauer-Homomorphismus ein projektiv einfacher  $kN_G(Q)/Q$ -Modul ist. Damit ist der Green-Korrespondent jedes unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  ein Gewichtsmodul. Daraus folgt Alperins Vermutung (siehe Bemerkung nach Satz 3.4.5).

Eine weitere bemerkenswerte Aussage aus dieser Arbeit, die im Beweis der Gewichtsvermutung mehrfach benutzt wurde, ist die folgende:

**3.4.10 Satz**

*Es sei  $G$  eine Gruppe mit zerfallendem  $BN$ -Paar. Dann ist jeder einfache  $\mathfrak{E}^k := \text{End}_{kG}(k_P^G)$ -Modul 1-dimensional.*

Die Gruppen bei einigen Beispielen am Ende der Datensammlung sind Chevalley-Gruppen in definierender Charakteristik, also Gruppen mit zerfallendem  $BN$ -Paar. Wir haben dies an der jeweiligen Stelle gekennzeichnet.



## Kapitel 4

# Endomorphismenringe als $G$ -Algebren

Es sei  $\mathcal{O}$  ein kommutativer, lokaler, noetherscher Ring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$  der Charakteristik  $p$  und  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$ . Wir nehmen stets an, dass alle hier auftretenden  $\theta$ -Algebren endlich erzeugt sind. Zudem seien  $G$  eine endliche Gruppe und  $P \in \text{Syl}_p(G)$ .

Wir werden in diesem Kapitel die Darstellungstheorie aus Thévenaz Buch [Thé95] ausarbeiten und auf unseren speziellen Fall anwenden. Wesentliche Teile der hier vorgestellten Theorie gehen auf L. Puig zurück, der sie unter anderem in den Arbeiten [Pui80], [Pui81], [Pui84], [Pui88a] und [Pui88b] entwickelt hat. Seine Betrachtungsweise ist auf wunderbare Weise so verallgemeinert, dass beispielsweise die Green-Korrespondenz und Brauers Sätze der Blocktheorie als Spezialfälle abfallen.

Wie in Abschnitt 3.4 angemerkt, zeigen wir in Abschnitt 4.9, dass der Green-Korrespondent eines (beliebigen) unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  mit Vertex  $Q$  ein projektiver  $kN_G(Q)/Q$ -Modul ist. Ein solcher Green-Korrespondent ist folglich genau dann ein Gewichtsmodul, wenn er einfach ist. Am Ende des Kapitels finden wir für die Einfachheit zwei hinreichende Voraussetzungen. Damit gelingt der Beweis von Alperins Gewichtsvermutung für eine spezielle Klasse von Gruppen, deren Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k := \text{End}_{kG}(k_P^G)$  quasi-Frobenius ist (vergleiche Bemerkung 4.9.6).

Zunächst müssen wir im Schnellschritt die nötigen Bezeichnungen und Konzepte aufnehmen.

### 4.1 Punkte und Exomorphismen

Erinnern wir uns an den Satz von Wedderburn, in dem halbeinfache (endlich-dimensionale)  $k$ -Algebren charakterisiert werden. Insbesondere kann man eine halbeinfache Algebra  $\mathfrak{A}$  als direktes Produkt  $\mathfrak{A} = \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathfrak{A})} \mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  schreiben, wo-

bei  $\text{Max}(\mathfrak{A})$  die Menge der maximalen zweiseitigen Ideale ist. Wegen  $J(\mathfrak{A}) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathfrak{A})} \mathfrak{m}$  gilt für eine beliebige endlich erzeugte  $\theta$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ :

$$\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A}) \cong \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathfrak{A})} \mathfrak{A}/\mathfrak{m} \cong \prod_{\mathfrak{m}} \text{End}_{\theta}(V_{\mathfrak{m}}).$$

Hier korrespondiert  $V_{\mathfrak{m}}$  zu dem eindeutigen maximalen zweiseitigen Ideal  $\mathfrak{m}$ , das  $V_{\mathfrak{m}}$  annulliert. Wir beginnen mit der grundlegenden und wichtigsten Definition in diesem Kapitel:

#### 4.1.1 Definition (Punkt)

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\theta$ -Algebra. Ist  $\mathfrak{e}$  ein primitives Idempotent von  $\mathfrak{A}$ , dann heißt die Menge der assoziierten Idempotente (vergleiche Seite 6)

$$\alpha := \{\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}^*\}$$

ein **Punkt von  $\mathfrak{A}$** . Die Menge aller Punkte von  $\mathfrak{A}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ .

#### 4.1.2 Lemma (vgl. [Thé95, Prop. (1.15), (2.7), Thm. (3.1)])

Es seien  $\theta = k$  und  $\mathfrak{A}$  eine  $k$ -Algebra mit Jacobson-Radikal  $J(\mathfrak{A})$ .

(a) Dann ist  $\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A})$  eine endlich-dimensionale  $k$ -Algebra und es gilt

$$\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A}) \cong \prod_{V \in \text{Irr}(\mathfrak{A})} \text{End}_k(V),$$

wobei  $\text{Irr}(\mathfrak{A})$  die Menge von Repräsentanten der einfachen  $\mathfrak{A}$ -Moduln ist. Jedes maximale zweiseitige Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $\mathfrak{A}$  ist der Annulator eines einfachen  $\mathfrak{A}$ -Moduls  $V_{\mathfrak{m}}$ . Wir haben also eine Bijektion zwischen  $\text{Max}(\mathfrak{A})$  und  $\text{Irr}(\mathfrak{A})$ .

(b) Für jeden Punkt  $\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$  gibt es genau ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  mit  $\mathfrak{e} \notin \mathfrak{m}$  für ein (und somit für alle)  $\mathfrak{e} \in \alpha$ . Somit haben wir eine Bijektion zwischen den Punkten von  $\mathfrak{A}$  und den maximalen zweiseitigen Idealen von  $\mathfrak{A}$ . Mit (a) stehen folglich die Punkte von  $\mathfrak{A}$  in Korrespondenz zu den einfachen  $\mathfrak{A}$ -Moduln. Dabei korrespondiert ein einfacher  $\mathfrak{A}$ -Modul  $V$  genau dann zu  $\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ , wenn  $V\mathfrak{e} \neq 0$  für ein (und somit alle)  $\mathfrak{e} \in \alpha$  gilt.

□

Wie sich später herausstellt, gründet das Konzept von Idempotentklassen, wie wir es oben kennen gelernt haben, auf fruchtbaren Boden. Es ist daher naheliegend, weitere Strukturen zu verallgemeinern und klassenweise aufzufassen. Dies führt auf die nächste wichtige Definition, in der Algebren-Homomorphismen zusammengefasst werden. Zuvor jedoch noch eine Erinnerung an innere Automorphismen.

#### 4.1.3 Definition (innerer Automorphismus)

Ein Automorphismus  $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  heißt **innerer Automorphismus**, falls ein Element  $\mathfrak{b}_f \in \mathfrak{A}^*$  existiert mit  $f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_f^{-1}}$  für alle  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ . In diesem Fall schreiben wir auch  $f = \text{Inn}(\mathfrak{b}_f)$ .

**4.1.4 Definition und Bemerkung** (vgl. [Thé95, Paragraph 8])

Es seien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei  $\theta$ -Algebren und  $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  ein Algebren-Homomorphismus. Dann nennen wir die Äquivalenzklasse  $\mathcal{F} := \{g : g = b \circ f \circ a, a \in \text{Inn}(\mathfrak{A}), b \in \text{Inn}(\mathfrak{B})\}$  einen **Exomorphismus** von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$ . Wegen  $f \circ \text{Inn}(\mathfrak{a}) = \text{Inn}(f(\mathfrak{a})) \circ f$ , können wir den Exomorphismus, der  $f$  enthält, auch als die Menge

$$\mathcal{F} = \{\text{Inn}(\mathfrak{b}) \circ f : \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^*\}$$

schreiben.

Weiterhin nennen wir den Exomorphismus  $\mathcal{F}$  **Einbettung**, falls ein  $f \in \mathcal{F}$  injektiv ist und als Bild  $f(1_{\mathfrak{A}})\mathfrak{B}f(1_{\mathfrak{A}})$  hat (womit auch alle anderen Elemente in  $\mathcal{F}$  diese Eigenschaft haben). In diesem Fall induziert  $\mathcal{F}$  eine injektive Abbildung

$$\mathcal{P}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{B}), \alpha \mapsto \mathcal{F}(\alpha) := \{f(\mathfrak{e}) : f \in \mathcal{F}, \mathfrak{e} \in \alpha\}.$$

Beachte, dass  $f$  nicht als unitär vorausgesetzt wird, d.h.  $1_{\mathfrak{A}}$  wird nicht notwendigerweise auf  $1_{\mathfrak{B}}$  abgebildet. Ist beispielsweise  $\mathfrak{e} \in \mathfrak{A}$  ein Idempotent, dann ist die Einbettung  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}\mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{A}$  ein Homomorphismus, der nicht unitär ist.

Beachte, dass  $f(a)$  für eine Einheit  $a \in \mathfrak{A}$  im Allgemeinen nicht mehr invertierbar ist. Allerdings ist  $f(a) + (1_{\mathfrak{B}} - f(1_{\mathfrak{A}}))$  ein in  $\mathfrak{B}$  invertierbares Element, so dass  $f$  einen Gruppenhomomorphismus  $\mathfrak{A}^* \rightarrow \mathfrak{B}^*, a \mapsto f(a) + (1_{\mathfrak{B}} - f(1_{\mathfrak{A}}))$  induziert.

**4.2  $G$ -Algebren und innere  $G$ -Algebren**

Wie in der Einleitung zu Kapitel 4 sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  mit einem kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Zudem sei  $G$  eine Gruppe. Das Konzept dieses Abschnitts betitelt J. Thévenaz selbst als das Hauptkonzept seines Buches. Wir beschränken uns nicht mehr auf die Darstellungstheorie von  $\theta G$ , sondern betrachten und analysieren ganz allgemein so genannte  $G$ -Algebren.

**4.2.1 Definition ( $G$ -Algebra)**

Eine  **$G$ -Algebra (über  $\theta$ )** ist ein Paar  $(\mathfrak{A}, \psi)$ , wobei  $\mathfrak{A}$  eine  $\theta$ -Algebra und  $\psi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{A})$  ein Gruppen-Homomorphismus ist. Die Gruppe  $G$  operiert auf  $\mathfrak{A}$  via Algebren-Automorphismen. Wir schreiben die Operation von  $G$  auf  $\mathfrak{A}$  von rechts und benutzen die Schreibweise  $\mathfrak{a}^g := \psi(g^{-1})(\mathfrak{a})$ . Selbsterklärend ist ein Homomorphismus von  $G$ -Algebren ein Algebren-Homomorphismus  $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  mit der Eigenschaft  $f(\mathfrak{a}^g) = f(\mathfrak{a})^g$  für alle  $g \in G$ .

Noch wichtiger, wie J. Thévenaz sagt, ist das Konzept der *inneren*  $G$ -Algebren, das sich wie folgt definiert.

**4.2.2 Definition (innere  $G$ -Algebra)**

Eine **innere  $G$ -Algebra** ist ein Paar  $(\mathfrak{A}, \varphi)$ , wobei  $\mathfrak{A}$  eine  $\theta$ -Algebra und  $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{A}^*$  ein Gruppen-Homomorphismus ist. Der Begriff erklärt sich mit der Beobachtung, dass es einen Gruppen-Homomorphismus der Form  $\mathfrak{A}^* \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{A}), \mathfrak{a} \mapsto$

$\text{Inn}(\mathfrak{a})$  gibt. Auch hier operiert  $G$  auf  $\mathfrak{A}$  via

$$\mathfrak{a}^g := \text{Inn}(\varphi(g^{-1}))(\mathfrak{a}).$$

Beachte, dass sich nun auch Begriffe wie Exomorphismus und Einbettung auf (innere)  $G$ -Algebren einschränken lassen, indem wir jeweils  $G$ -Algebren-Homomorphismen betrachten.

Wie J. Thévenaz, wollen wir uns an dieser Stelle einige Beispiele von (inneren)  $G$ -Algebren betrachten.

### 4.2.3 Beispiel

- (a) Die Gruppenalgebra  $\theta G$  selbst ist eine innere  $G$ -Algebra, indem wir  $G$  in  $(\theta G)^*$  einbetten.
- (b) Ist  $M$  ein  $\theta G$ -Gitter, so gibt es eine Darstellung  $\phi : \theta G \rightarrow \text{End}_\theta(M)$ . Dann ist  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(M)$  eine innere  $G$ -Algebra via der Darstellung (von  $G$ )  $\rho' : G \rightarrow \text{Aut}_\theta(M) = \mathfrak{A}^*$ . Dieses Beispiel ist für uns deshalb von herausragender Bedeutung, weil wir hier die Theorie der (inneren)  $G$ -Algebren für unseren speziellen Fall der Endomorphismenringe von Permutationsmoduln anwenden können.

Weil wir parallel zur Entwicklung der Terminologie auch ihre konkrete Bedeutung für bestimmte Permutationsmoduln analysieren wollen, betrachten wir folgendes Beispiel.

### 4.2.4 Bemerkung

Es sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Zusätzlich sei  $\theta_P^G = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{n_i} W_{i,j}$  wie vor Lemma 2.9.1 eine Zerlegung des Permutationsmoduls in unzerlegbare direkte Summanden. Dann gibt es für jedes  $1 \leq i \leq s$  eine Einbettung

$$\mathcal{F} : \text{End}_\theta(W_{i,1}) \rightarrow \text{End}_\theta(\theta_P^G)$$

innerer  $G$ -Algebren.

### 4.2.5 Definition und Bemerkung

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine (innere)  $G$ -Algebra. Dann kann man die Operation von  $G$  auf  $\mathfrak{A}$  auf jede Untergruppe  $H \leq G$  einschränken. Die Algebra trägt dann eine (innere)  $H$ -Algebren-Struktur, die wir durch  $\text{Res}_H^G(\mathfrak{A})$  kenntlich machen und die **Restriktion auf  $H$**  nennen.

Die Bedeutung der folgenden Definition von Fixpunktmenge ist für dieses Kapitel außerordentlich wichtig.

### 4.2.6 Definition

Für eine Untergruppe  $H \leq G$  ist

$$\text{Fix}_H(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A} : \mathfrak{a}^h = \mathfrak{a} \text{ für alle } h \in H\}$$

die Menge der  $H$ -**Fixpunkte** von  $\mathfrak{A}$ .

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir das Prinzip der Exomorphismen auf  $G$ -Algebren übertragen.

#### 4.2.7 Definition

Es seien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei  $G$ -Algebren und  $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  ein  $G$ -Algebren-Homomorphismus. Dann ist die Äquivalenzklasse

$$\mathcal{F} := \{\text{Inn}(\mathfrak{b}) \circ f : \mathfrak{b} \in (\text{Fix}_G(\mathfrak{B}))^*\}$$

ein **Exomorphismus von  $G$ -Algebren**.

Anknüpfend daran wollen wir noch eine besondere Klasse von Exomorphismen herausstellen. Ist nämlich  $\mathcal{F} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  ein Exomorphismus von  $G$ -Algebren, dann kann man jeden  $G$ -Algebren-Homomorphismus  $f \in \mathcal{F}$  durch Restriktion auf eine Untergruppe  $H \leq G$  als  $H$ -Algebren-Homomorphismus auffassen, was wir durch die Notation  $\text{Res}_H^G(f) : \text{Res}_H^G(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Res}_H^G(\mathfrak{B})$  kenntlich machen. Die Menge aller restringierten Homomorphismen in  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir dann mit  $\text{Res}_H^G(\mathcal{F})$  und nennen diese die **Restriktion des Exomorphismus  $\mathcal{F}$  auf  $H$** . Beachte, dass  $\text{Res}_H^G(\mathcal{F})$  wegen  $\text{Fix}_G(\mathfrak{B})^* \subseteq \text{Fix}_H(\mathfrak{B})^*$  im Allgemeinen mehr Elemente hat als  $\mathcal{F}$ .

### 4.3 Der Brauer-Homomorphismus

Wie in der Einleitung zu Kapitel 4 sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  mit einem kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Zudem seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra.

Offensichtlich ist  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$  mit dem gleichen neutralen Element. Wenn wir nun auf das für uns wichtige Beispiel  $\mathfrak{A} = \text{End}_\theta(M)$  für ein  $\theta G$ -Gitter  $M$  schauen, dann gilt offensichtlich  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A}) = \text{End}_{\theta H}(M)$ . Insbesondere ist  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A}) = \text{End}_{\theta G}(M)$ .

Beachte, dass  $\text{Fix}_{H^g}(\mathfrak{A}) = (\text{Fix}_H(\mathfrak{A}))^g$  für die zu  $H$  konjugierte Untergruppe  $H^g \leq G$  gilt. Daher ist  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  invariant unter  $N_G(H)$  und kann als  $N_G(H)$ -Algebra und als  $N_G(H)/H$ -Algebra betrachtet werden. Die Eigenschaft, *innere  $G$ -Algebra* zu sein, vererbt sich im Allgemeinen nicht auf  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$ . Allein, wenn wir die Einschränkung auf den Zentralisator  $C_G(H)$  betrachten, geben wir  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  eine innere  $C_G(H)$ -Algebren-Struktur.

Völlig analog zu  $G$ -Algebren definieren wir für einen  $\theta G$ -Modul  $M$  und eine Untergruppe  $H \leq G$  die Menge der  $H$ -Fixpunkte von  $M$ , die wir mit  $\text{Fix}_H(M)$  bezeichnen.

Einen besonderen Fall wollen wir noch herausheben und mit eigener Terminologie belegen. Ist nämlich  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A})$  eine lokale Algebra, d.h. ist  $1_{\mathfrak{A}}$  das einzige primitive Idempotent von  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A})$ , so nennen wir  $\mathfrak{A}$  **primitiv**. Beachte, dass dies äquivalent ist zu der Eigenschaft, nur einen Punkt der Form  $\{1_{\mathfrak{A}}\}$  zu haben.

Für eine Untergruppenkette  $L \leq H \leq G$  gilt offensichtlich  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A}) \leq \text{Fix}_H(\mathfrak{A}) \leq \text{Fix}_L(\mathfrak{A})$ . Bildlich gesprochen können wir die Beziehung  $H \geq L$  durch die Einbettung  $r_L^H : \text{Fix}_H(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Fix}_L(\mathfrak{A})$  auf die Algebra übertragen. Doch auch für die Beziehung  $L \leq H$  finden wir eine Entsprechung, die durch einen Glättungsoperator realisiert wird:

Wir nennen die Abbildung

$$t_L^H : \text{Fix}_L(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Fix}_H(\mathfrak{A}), \mathfrak{a} \mapsto \sum_{x \in [L \setminus H]} \mathfrak{a}^x,$$

wobei  $[L \setminus H]$  ein Repräsentantensystem der (Rechts-)Nebenklassen von  $L$  in  $H$  ist, die **relative Spurabbildung**. Das Bild von  $t_L^H$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}_L^H := t_L^H(\text{Fix}_L(\mathfrak{A}))$ . Mit elementaren Rechnungen zeigt man, dass  $\mathfrak{A}_L^H$  ein zweiseitiges Ideal in  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  ist.

Wir haben nun die nötige Terminologie eingeführt, um den Brauer-Homomorphismus zu definieren. Zur Erinnerung: Das eindeutig bestimmte maximale Ideal von  $\mathcal{O}$  haben wir mit  $\mathfrak{p}$  bezeichnet.

#### 4.3.1 Definition und Bemerkung

Es sei  $Q \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ . Dann ist  $\sum_{R < Q} \mathfrak{A}_R^Q$ , wobei  $R < Q$  echte Untergruppen von  $Q$  bezeichnen, ein zweiseitiges Ideal in  $\text{Fix}_Q(\mathfrak{A})$  (weil die einzelnen Summanden schon Ideale sind). Der **Brauer-Homomorphismus**  $br_Q$  ist definiert als die kanonische Surjektion

$$br_Q : \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}) \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}(Q) := \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}) / \left( \sum_{R < Q} \mathfrak{A}_R^Q + \mathfrak{p} \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}) \right).$$

Die Algebra  $\overline{\mathfrak{A}}(Q)$  heißt der **Brauer-Quotient** von  $\mathfrak{A}$  bzgl.  $Q$ . Beachte, dass  $N_G(Q)$  den Brauer-Quotienten invariant lässt. Daher ist  $\overline{\mathfrak{A}}(Q)$  eine  $N_G(Q)$ - bzw.  $N_G(Q)/Q$ -Algebra.

Ist  $Q \leq G$  keine  $p$ -Gruppe, so gilt  $\overline{\mathfrak{A}}(Q) = 0$  (vergleiche [Thé95, La. (11.7)]).

Das gleiche Konzept übertragen wir auf Moduln und erhalten:

#### 4.3.2 Definition und Bemerkung

Es seien  $M$  ein  $\theta G$ -Gitter und  $L \leq H \leq G$ . Dann heißt

$$t_L^H : \text{Fix}_L(M) \rightarrow \text{Fix}_H(M), m \mapsto \sum_{x \in [L \setminus H]} m.x$$

die **relative Spurabbildung**. Für das Bild der Spurabbildung schreiben wir

$$M_L^H := t_L^H(\text{Fix}_L(M)).$$

Dies ist nicht zu verwechseln mit dem Modul  $M$ , der auf  $L$  eingeschränkt und anschließend nach  $H$  induziert wird. Trotz dieser Doppelbezeichnungen ist in den

auftretenden Situationen die Gefahr der Doppeldeutigkeit nicht gegeben, so dass wir diese formelle Ungenauigkeit zum Zweck der übersichtlichen Schreibweise in Kauf nehmen. Dann ist der **Brauer-Homomorphismus**  $br_Q$  für eine Untergruppe  $Q \leq G$  definiert als

$$br_Q : \text{Fix}_Q(M) \rightarrow \overline{M}(Q) := \text{Fix}_Q(M) / \left( \sum_{R < Q} M_R^Q + \mathfrak{p}\text{Fix}_Q(M) \right).$$

Den Bildbereich  $\overline{M}(Q)$  nennen wir den **Brauer-Quotienten von  $M$  bzgl.  $Q$** . Wie oben sehen wir leicht, dass  $\overline{M}(Q)$  eine  $kN_G(Q)$ - und  $kN_G(Q)/Q$ -Modulstruktur trägt.

Beachte die Berührungspunkte zu anderen Kapiteln. Zum einen tritt die Fixpunktmenge bereits zu Beginn des zweiten Kapitels in Bemerkung 2.1.2 im Zusammenhang mit Kondensationsmoduln auf. Zum anderen ist durchaus gerechtfertigt zu behaupten, dass in J. A. Greens Arbeit [Gre78] über Endomorphismenringe von Permutationsmoduln, die quasi-Frobenius sind, die Untersuchung der Fixpunktmenge das Kernstück bildet (vergleiche Abschnitt 3.4).

Wir können jetzt die Terminologie konkret auf das Beispiel  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(M)$  für ein  $\theta G$ -Gitter  $M$  anwenden und erhalten:

**4.3.3 Lemma ([Thé95, La. 12.4, Prop. 12.5])**

Es sei  $M$  ein  $\theta G$ -Gitter. Außerdem seien  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(M)$  und  $\epsilon$  ein Idempotent von  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A})$ .

- (a) Dann sind die inneren  $G$ -Algebren  $\text{End}_\theta(\epsilon M)$  und  $\epsilon \text{End}_\theta(M) \epsilon$  isomorph.
- (b) Es sei  $N$  ein weiteres  $\theta G$ -Gitter. Es existiert genau dann eine Einbettung innerer  $G$ -Algebren  $\mathcal{F} : \text{End}_\theta(N) \rightarrow \text{End}_\theta(M)$ , wenn  $N$  isomorph zu einem direkten Summanden von  $M$  ist. Die Einbettung  $\mathcal{F}$  ist in diesem Fall eindeutig.  $\square$

Wir können Einbettungen, wie wir sie hier definiert haben, als Verallgemeinerungen des Konzepts der direkten Summanden verstehen.

Schließlich weisen wir noch auf die Bedeutung im Fall  $M = \theta_P^G$  bzw.  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(\theta_P^G)$  hin. Es seien  $W$  ein unzerlegbarer direkter Summand von  $\theta_P^G$ ,  $\mathfrak{A}_W := \text{End}_\theta(W)$  und  $Q \leq P$ . Dann induziert nach [Thé95, Prop. (15.6)] die Einbettung  $\mathcal{F} : \mathfrak{A}_W \rightarrow \mathfrak{A}$  (vgl. Bemerkung 4.2.4) durch Restriktion eine Einbettung von  $Q$ -Algebren  $\mathcal{F} : \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}_W) \rightarrow \text{Fix}_Q(\mathfrak{A})$  und somit auch eine Einbettung von  $k$ -Algebren:

$$\overline{\mathcal{F}}(Q) : \overline{\mathfrak{A}_W}(Q) \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}(Q).$$

Dies ist sogar eine Einbettung von  $N_G(Q)/Q$ -Algebren.

## 4.4 Punktierte Gruppen

Dieser Abschnitt führt das zweite wichtige Konzept in Thévenaz' Buch ein, das der punktierten Gruppen. Wir übernehmen alle Bezeichnungen aus den vorhergehenden Abschnitten. Insbesondere sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  für einen kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Zudem seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra.

### 4.4.1 Definition (punktierte Gruppe)

- (a) Eine **punktierte Gruppe** ist ein Paar  $(H, \alpha)$ , wobei  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$  und  $\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A}))$  ein Punkt von  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  sind. Als abkürzende Schreibweise für eine punktierte Gruppe setzen wir  $H_\alpha := (H, \alpha)$ . Die Menge aller punktierten Gruppen von  $\mathfrak{A}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{PG}(\mathfrak{A})$ .
- (b) Es sei  $\theta = k$ . Wie in Lemma 4.1.2 beschrieben, korrespondiert ein Punkt  $\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A}))$  zu einem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}_\alpha$  von  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  und zu einem einfachen  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$ -Modul  $V(\alpha)$ . Den einfachen Modul nennen wir **Multiplizitätsmodul von  $H_\alpha$**  und die einfache  $k$ -Algebra  $\mathfrak{S}(\alpha) = \text{Fix}_H(\mathfrak{A})/\mathfrak{m}_\alpha \cong \text{End}_k(V(\alpha))$  die **Multiplizitätsalgebra von  $H_\alpha$** .

Immer noch befinden wir uns in der Begriffsbildung und wenden uns der Lokalisierung zu, die mit einer punktierten Gruppe  $(H, \alpha)$  einhergeht.

### 4.4.2 Definition und Bemerkung ([Thé95, La. 13.1])

Es sei  $H_\alpha$  eine punktierte Gruppe von  $\mathfrak{A}$ . Eine **Einbettung bezüglich  $H_\alpha$**  ist eine Einbettung von  $H$ -Algebren  $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \rightarrow \text{Res}_H^G(\mathfrak{A})$ , so dass  $f(1_{\mathfrak{B}}) \in \alpha$  für ein (und damit für alle)  $f \in \mathcal{F}$  gilt.

Damit ist der Exomorphismus, der die Inklusion  $f : \epsilon \mathfrak{A} \epsilon \rightarrow \text{Res}_H^G(\mathfrak{A})$  für ein  $\epsilon \in \alpha$  enthält, eine Einbettung bezüglich  $H_\alpha$ . Man kann sogar zeigen, dass eine Einbettung bezüglich  $H_\alpha$  bis auf Hintereinanderschaltung eines Exo-Isomorphismus eindeutig ist. Die Algebra  $\mathfrak{B}$  einer solchen Einbettung nennen wir **Lokalisierung von  $\mathfrak{A}$  an  $H_\alpha$**  und führen dafür die Schreibweise  $\mathfrak{A}_\alpha$  ein.

Beachte, dass Lokalisierungen an  $H_\alpha$  primitive  $H$ -Algebren sind (vergleiche Seite 77).

Offensichtlich operiert  $G$  auf der Menge der punktierten Gruppen von  $\mathfrak{A}$ . Sind  $H_\alpha$  eine solche und  $g \in G$ , so ist  $(H_\alpha)^g = (g^{-1}Hg)_{\alpha^g} = (H^g)_{\alpha^g}$ . Der Stabilisator  $N_G(H_\alpha)$  heißt **Normalisator** von  $H_\alpha$  und erfüllt

$$H \leq N_G(H_\alpha) \leq N_G(H).$$

Ist  $\mathfrak{A}$  sogar eine innere  $G$ -Algebra, so gilt

$$HC_G(H) \leq N_G(H_\alpha).$$

Vergleiche dazu [Thé95, p.103]. □

Nun stabilisieren  $N_G(H_\alpha)$  und  $H$  den Punkt  $\alpha$ , also auch das dazu korrespondierende maximale Ideal  $\mathfrak{m}_\alpha$ . Folglich operieren sowohl  $N_G(H_\alpha)$  als auch der Quotient  $\overline{N}_G(H_\alpha) := N_G(H_\alpha)/H$  auf der zugehörigen Multiplizitätsalgebra  $\mathfrak{S}(\alpha) = \text{Fix}_H(\mathfrak{A})/\mathfrak{m}_\alpha$ . Nun gilt  $\mathfrak{S}(\alpha) \cong \text{End}_k(V(\alpha))$ , wobei  $V(\alpha)$  den korrespondierenden Multiplizitätsmodul bezeichnet, und  $Z(\mathfrak{S}(\alpha)) = k \cdot 1_{\mathfrak{S}(\alpha)}$ . Daher können wir  $V(\alpha)$  mit einer Modulstruktur über einer getwisteten Gruppenalgebra  $k_{\#}\hat{N}_G(H_\alpha)$  oder  $k_{\#}\widehat{N}_G(H_\alpha)$  versehen (vergleiche [Thé95, p. 103]). Die genaue Konstruktion dieses Twists entnehme man [Thé95, Exp. 10.8]. Wir verzichten auf eine präzise Erklärung an dieser Stelle, weil später klar wird, dass in unserem konkreten Fall die Modulstruktur tatsächlich über dem ursprünglichen statt dem getwisteten Gruppenring existiert.

Ist  $\mathfrak{A}$  sogar eine innere  $G$ -Algebra, so trägt  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  – und somit auch die Multiplizitätsalgebra  $\mathfrak{S}(\alpha)$  – eine innere  $C_G(H)$ -Algebrenstruktur. Allerdings können wir im Allgemeinen nicht wie oben zum Quotienten nach  $H \cap C_G(H) = Z(H)$  übergehen, weil  $(1_{\mathfrak{S}(\alpha)})^{Z(H)} := \{(1_{\mathfrak{S}(\alpha)})^z : z \in Z(H)\}$  zwar eine zyklische multiplikative Untergruppe von  $k^* = k \setminus \{0\}$  aber im Allgemeinen nicht trivial ist. In unserem speziellen Fall ist  $H$  eine  $p$ -Gruppe. Dann ist auch  $(1_{\mathfrak{S}(\alpha)})^{Z(H)}$  eine  $p$ -Untergruppe von  $k^*$ , die somit trivial ist, da es keine nicht-trivialen  $p$ -ten Einheitswurzeln in  $k^*$  gibt. Daher dürfen wir hier zum Quotienten übergehen. Folglich ist  $\mathfrak{S}(\alpha)$  eine innere  $\overline{C}_G(H)$ -Algebra mit  $\overline{C}_G(H) := C_G(H)/Z(H) \cong HC_G(H)/H$ .

Wir wenden dies alles wieder auf „unsere“ Situation an. Es seien

$$\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(\theta_P^G) \text{ und } \mathfrak{A}_W := \text{End}_\theta(W),$$

wobei  $W$  ein unzerlegbarer direkter Summand von  $\theta_P^G$  ist. Für  $Q \leq G$  seien die Punkte  $\gamma \in \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}) = \text{End}_{\theta_Q}(\theta_P^G)$  und  $\gamma_W \in \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}_W) = \text{End}_{\theta_Q}(W)$  gegeben. Zudem sei  $\overline{N}_G(Q) := N_G(Q)/Q$ . Dann haben  $\mathfrak{S}(\gamma)$  und  $\mathfrak{S}(\gamma_W)$  jeweils eine  $N_G(Q)$ - und  $\overline{N}_G(Q)$ -Algebrenstruktur sowie eine innere  $C_G(Q)$ - und  $C_G(Q)/Z(Q) \cong QC_G(Q)/Q$ -Algebrenstruktur. Die Multiplizitätsmoduln  $V(\gamma)$  bzw.  $V(\gamma_W)$  haben nach obigen Aussagen eine  $k_{\#}\hat{N}_G(Q)$ - und eine  $k_{\#}\widehat{N}_G(Q)$ -Modulstruktur. Wie wir in Korollar 4.8.2 sehen, ist die Modulstruktur sogar über dem ungetwisteten Gruppenring gegeben und die Multiplizitätsmoduln sind eng mit den Moduln  $\theta_P^G$  bzw.  $W$  verbunden.

Beachte, dass die beiden Multiplizitätsmoduln eine  $kC_G(Q)$ - bzw.  $kC_G(Q)/Z(Q)$ -Modulstruktur tragen, die man durch Einschränkung von den Normalisatoren (quotienten) erhält.

## 4.5 Ordnungsrelationen

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra. Zudem sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  für einen kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Wir werden in diesem Abschnitt Relationen zwischen verschiedenen punktierten Gruppen charakterisieren. Zum einen

zielt dies auf eine Verallgemeinerung des Gruppenalgebra-Begriffs ab. Zum anderen werden wir später feststellen, dass Begriffe wie „relativ  $H$ -projektiv“ aus der Modultheorie ebenfalls Spezialfälle dieses Konzepts sind.

Wir fixieren also Untergruppen  $L \leq H \leq G$  von  $G$  und eine  $G$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ . Des Weiteren seien die Punkte  $\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A}))$  und  $\beta \in \mathcal{P}(\text{Fix}_L(\mathfrak{A}))$  gegeben.

Wir erinnern an die Einbettung  $r_L^H : \text{Fix}_H(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Fix}_L(\mathfrak{A})$  auf Seite 77.

#### 4.5.1 Definition

Wir sagen  $L_\beta$  ist in  $H_\alpha$  **enthalten**, wenn für  $\mathfrak{e} \in \alpha$  ein Idempotent  $\mathfrak{f} \in \beta$  existiert, so dass  $\mathfrak{f}$  in einer Idempotentzerlegung von  $r_L^H(\mathfrak{e})$  vorkommt. In diesem Fall schreiben wir  $L_\beta \leq H_\alpha$ .

Wir haben folgende Charakterisierung dieser Relation:

#### 4.5.2 Lemma (vgl. [Thé95, La. 13.3])

Es sei  $L \leq H$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $L_\beta \leq H_\alpha$ .
- (b) Für jedes  $\mathfrak{e} \in \alpha$  existiert ein  $\mathfrak{f} \in \beta$ , das in einer Idempotentzerlegung von  $r_L^H(\mathfrak{e})$  vorkommt.
- (c)  $(r_L^H)^{-1}(\mathfrak{m}_\beta) \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$ . □

Schreibt man (b) ohne die Einbettungsabbildung  $r_L^H$ , so heißt das, dass zu jedem  $\mathfrak{e} \in \alpha$  ein  $\mathfrak{f} \in \beta$  existiert mit  $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{e} = \mathfrak{f}$ . Beachte, dass  $\leq$  eine partielle Ordnung auf der Menge der punktierten Gruppen  $\mathcal{PG}(\mathfrak{A})$  ist.

Ist  $\mathfrak{A}$  eine primitive  $G$ -Algebra, so ist  $\alpha := \{1_{\mathfrak{A}}\}$  der einzige Punkt von  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A})$ . Dann erfüllt jede punktierte Gruppe  $L_\beta$  die Relation  $L_\beta \leq G_\alpha$ .

Wir können jetzt zeigen, dass im Fall eines  $\theta G$ -Gitters  $M$  die Ordnungsrelation der punktierten Gruppen auf  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(M)$  zu den direkten Summanden von  $M$  korrespondiert.

#### 4.5.3 Definition und Bemerkung

- (a) Es seien ein  $\theta G$ -Modul  $M$ , eine Untergruppe  $H \leq G$  und  $\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A})) = \mathcal{P}(\text{End}_{\theta H}(M))$  gegeben. Dann ist ein Idempotent  $\mathfrak{e} \in \alpha$  die Projektion auf einen unzerlegbaren direkten Summanden der Einschränkung  $M_H$  von  $M$ . Es ist  $\mathfrak{e}M$  genau dann isomorph zu  $\mathfrak{f}M$  für ein weiteres primitives Idempotent  $\mathfrak{f} \in \text{Fix}_H(\mathfrak{A})$ , wenn  $\mathfrak{e}$  und  $\mathfrak{f}$  in  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  konjugiert sind. Wir sehen also, dass ein Punkt in  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  zu einer Isomorphieklasse von unzerlegbaren direkten Summanden von  $M_H$  korrespondiert. Einen Vertreter davon bezeichnen wir mit  $M_\alpha$ . Dann ist die Lokalisierung  $\mathfrak{A}_\alpha$  wegen  $\mathfrak{e}\mathfrak{A}\mathfrak{e} \cong \text{End}_\theta(\mathfrak{e}M)$  isomorph zum Endomorphismenring  $\text{End}_\theta(M_\alpha)$ .
- (b) Sind  $L \leq H$  Untergruppen von  $G$ ,  $\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A}))$  und  $\beta \in \mathcal{P}(\text{Fix}_L(\mathfrak{A}))$ , so folgt mit Lemma 4.5.2:

Es gilt  $L_\beta \leq H_\alpha$  genau dann, wenn  $M_\beta$  isomorph zu einem direkten Summanden der Einschränkung  $(M_\alpha)_L$  ist.

- (c) Es seien  $W$  ein unzerlegbarer direkter Summand von  $\theta_P^G$  und  $U$  der Green-Korrespondent von  $W$  in  $N_G(Q)$  mit Vertex  $Q$ . Weiter seien  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(\theta_P^G)$  und  $\mathfrak{A}_W := \text{End}_\theta(W)$ . Dann gilt:
- (i) Wir betrachten den Punkt  $\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_G(\mathfrak{A}))$ , der die Projektion auf  $W$  enthält, und den Punkt  $\gamma \in \mathcal{P}(\text{Fix}_{N_G(Q)}(\mathfrak{A}))$ , der die Projektion auf  $U$  enthält. Die punktierten Gruppen  $G_\alpha$  von  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A})$  und  $N_G(Q)_\gamma$  von  $\text{Fix}_{N_G(Q)}(\mathfrak{A})$  korrespondieren im Sinne von (a) zu den direkten Summanden  $W$  und  $U$ . Dann muss nach obigen Überlegungen  $G_\alpha \geq N_G(Q)_\gamma$  gelten.
  - (ii) Die punktierten Gruppen  $G_{\alpha'}$  von  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A}_W)$  mit  $\alpha' = \{1_{\mathfrak{A}_W}\}$  und  $N_G(Q)_{\gamma'}$  von  $\text{Fix}_{N_G(Q)}(\mathfrak{A}_W)$ , wobei  $\gamma' \in \mathcal{P}(\text{Fix}_{N_G(Q)}(\mathfrak{A}_W))$  die Projektion von  $W_{N_G(Q)}$  auf  $U$  enthält, korrespondieren zu den direkten Summanden  $W$  und  $U$ . Dann muss nach obigen Überlegungen  $G_{\alpha'} \geq N_G(Q)_{\gamma'}$  gelten.  $\square$

Wir führen noch ein weiteres Ordnungsprinzip ein, das nicht  $r_L^G$ , sondern  $t_L^H$  involviert. Auch hier werden wir später verstehen, dass die Eigenschaft, ein direkter Summand eines induzierten  $\theta G$ -Gitters zu sein, nur ein spezieller Fall dieses allgemeineren Konzepts ist.

Die Bezeichnungen vom Beginn des Abschnitts seien weiter gültig.

#### 4.5.4 Definition (relativ projektiv)

- (a) Wir sagen  $H_\alpha$  ist **relativ projektiv** zu  $L_\beta$ , falls  $H \geq L$  und

$$\alpha \subseteq t_L^H(\langle \beta \rangle_{\text{Fix}_L(\mathfrak{A})})$$

gilt, wobei  $\langle \beta \rangle_{\text{Fix}_L(\mathfrak{A})}$  das von  $\beta$  erzeugte zweiseitige Ideal in  $\text{Fix}_L(\mathfrak{A})$  bezeichnet. In diesem Fall schreiben wir  $H_\alpha \text{pr} L_\beta$ .

- (b)  $H_\alpha$  heißt **relativ projektiv zu  $L$** , falls ein Punkt  $\beta \in \mathcal{P}(\text{Fix}_L(\mathfrak{A}))$  existiert, so dass  $H_\alpha \text{pr} L_\beta$  gilt.
- (c)  $H_\alpha$  heißt **projektiv**, falls es relativ projektiv zur trivialen Gruppe  $L = 1$  ist.

Wir können folgende Charakterisierungen von relativer Projektivität angeben:

#### 4.5.5 Lemma ([Thé95, La. 14.1, La. 14.2])

Die Bezeichnungen seien wie zu Beginn dieses Abschnitts. Dann gilt:

- (a) Für  $\mathfrak{e} \in \alpha$  und  $\mathfrak{f} \in \beta$  gilt  $H_\alpha \text{pr} L_\beta$  genau dann, wenn es Elemente  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \text{Fix}_L(\mathfrak{A})$  mit

$$\mathfrak{e} = t_L^H(\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{b})$$

gibt.

- (b)  $H_\alpha$  ist genau dann relativ projektiv zu  $L$ , falls  $\alpha \subseteq \mathfrak{A}_L^H = t_L^H(\text{Fix}_H(\mathfrak{A}))$  ist.

Wir übertragen diese Begriffsbildung auf  $G$ -Algebren.

#### 4.5.6 Definition (relativ projektiv)

Eine  $G$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  heißt **relativ projektiv zu  $H$** , falls die Spurabbildung  $t_H^G : \text{Fix}_H(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Fix}_G(\mathfrak{A})$  surjektiv ist, falls also  $1_{\mathfrak{A}}$  in  $\mathfrak{A}_H^G$  liegt. Nach Lemma 4.5.5(b) ist dies äquivalent zu der Eigenschaft, dass jede punktierte Gruppe der Form  $G_\alpha$  relativ projektiv zu  $H$  ist. Ist  $\mathfrak{A}$  relativ projektiv zur trivialen Untergruppe von  $G$ , so heißt sie **projektiv**.

Wir haben jetzt die grundlegende Terminologie bereit gestellt, um die so genannten lokalen Punkte zu definieren. In der Theorie der Vertizes von Moduln haben wir minimale Gruppen mit gewissen Eigenschaften betrachtet. Dieses Konzept wird hier im allgemeineren Kontext übernommen.

Wir fixieren von nun an eine Untergruppe  $Q \leq G$ . Die Notation suggeriert schon hier eine  $p$ -Untergruppe. Für diesen kurzen Moment ist diese Eigenschaft noch nicht nötig, sondern sie ergibt sich viel mehr aus den weiteren Überlegungen.

#### 4.5.7 Definition (lokal punktierte Gruppe, lokaler Punkt)

Es sei  $Q_\gamma$  eine punktierte Gruppe von  $\mathfrak{A}$ . Dann heißt  $Q_\gamma$  **lokal punktierte Gruppe**, falls sie bezüglich keiner echten Untergruppe relativ projektiv ist. Der Punkt  $\gamma$  heißt dann **lokaler Punkt**. Für eine feste  $p$ -Gruppe  $Q$  bezeichnen wir die Menge aller lokalen Punkte von  $\text{Fix}_Q(\mathfrak{A})$  mit  $\mathcal{LP}(\text{Fix}_Q(\mathfrak{A}))$ .

Um dies besser zu durchdringen schauen wir auf folgende äquivalente Beschreibungen:

#### 4.5.8 Lemma (vgl. [Thé95, La. 14.4])

Es sei  $Q_\gamma$  eine punktierte Gruppe von  $\mathfrak{A}$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $Q_\gamma$  ist eine lokal punktierte Gruppe.
- (b)  $Q_\gamma$  ist nicht relativ projektiv zu einer echten Untergruppe von  $Q$ .
- (c)  $\gamma \notin \sum_{R < Q} \mathfrak{A}_R^Q$ .
- (d)  $br_Q(\gamma) \neq \{0\}$ .
- (e)  $\text{Ker}(br_Q) \subset \mathfrak{m}_\gamma$ .

In diesem Fall ist  $Q$  eine  $p$ -Gruppe. □

Das Zusammenspiel von lokalen Punkten von  $\text{Fix}_Q(\mathfrak{A})$  und Punkten von  $\overline{\mathfrak{A}}(Q)$  beschreibt das folgende Lemma.

**4.5.9 Lemma** (vgl. [Thé95, La. 14.5, La. 14.6])

(a) Der Brauer-Homomorphismus  $br_Q : \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}) \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}(Q)$  induziert eine Bijektion zwischen  $\mathcal{LP}(\text{Fix}_Q(\mathfrak{A}))$  und  $\mathcal{P}(\overline{\mathfrak{A}}(Q))$ .

(b) Ist  $Q_\gamma$  eine lokal punktierte Gruppe von  $\mathfrak{A}$ , so ist  $\mathfrak{S}(\gamma)$  isomorph zu  $\overline{\mathfrak{A}}(Q)$ .  $\square$

Wir werden auch diese Ordnungsrelation explizit am Beispiel  $\mathfrak{A} = \text{End}_\theta(M)$  für ein  $\theta G$ -Gitter  $M$  untersuchen. Vorher kommen wir aber nicht umhin, noch weitere Begriffe und Konstruktionen einzuführen. Die Ordnungsrelation „ $\leq$ “ haben wir bereits im speziellen Beispiel mit der Einschränkung von Moduln in Verbindung gebracht. Hier werden wir den Zusammenhang zur Induktion von Moduln finden. Zuvor seien uns noch folgende Bemerkungen erlaubt. Eine Einbettung erhält punktierte Gruppen, die Ordnungsrelation, die relative Projektivität, Lokalität sowie die Lokalisierung und den Multiplizitätsmodul von punktierten Gruppen, d.h. das Bild eines Objekts mit einer der obigen Eigenschaft hat wieder diese Eigenschaft. Man vergleiche dazu [Thé95, Prop. 15.1, 15.3].

## 4.6 Induktion

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra. Zudem sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  für einen kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Wir fixieren eine Untergruppe  $H \leq G$  und eine innere  $H$ -Algebra  $\mathfrak{B}$ .

### 4.6.1 Definition

[induzierte Algebra] Die **induzierte Algebra**  $\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})$  ist definiert durch

$$\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B}) := \bigoplus_{x,y \in [H \backslash G]} x^{-1} \otimes_{\theta H} \mathfrak{B} \otimes_{\theta H} y,$$

wobei  $[H \backslash G]$  eine Transversale von  $H$  in  $G$  bezeichnet.

Diese Konstruktion wollen wir nicht detailliert diskutieren, sondern vielmehr die relevanten Eigenschaften zusammentragen.

### 4.6.2 Lemma

 (vgl. [Thé95, Sec. 16])

Mit den Bezeichnungen von Definition 4.6.1 gilt:

(a) Es ist  $\dim_\theta(\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})) = |G : H|^2 \dim_\theta \mathfrak{B}$ .

(b) Das Einselement von  $\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})$  ist gegeben durch

$$1_{\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})} = \sum_{x \in [H \backslash G]} x^{-1} \otimes_{\mathcal{O}H} 1_{\mathfrak{B}} \otimes_{\mathcal{O}H} x.$$

- (c) Die induzierte Algebra  $\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})$  trägt eine innere  $G$ -Algebren-Struktur, gegeben durch den Gruppen-Homomorphismus

$$\varphi : G \rightarrow \text{Ind}_H^G(\mathfrak{B}), g \mapsto \sum_{x \in [H \backslash G]} x^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_H} 1_{\mathfrak{B}} \otimes_{\mathcal{O}_H} xg.$$

- (d) Die Induktion ist transitiv: Es sei  $L \leq H \leq G$  eine Kette von Untergruppen und  $\mathfrak{C}$  eine innere  $L$ -Algebra. Dann gilt

$$\text{Ind}_H^G(\text{Ind}_L^H(\mathfrak{C})) \cong \text{Ind}_L^G(\mathfrak{C})$$

als innere  $G$ -Algebren.

- (e) Im speziellen Fall  $\mathfrak{B} = \text{End}_\theta(M)$  für ein  $\theta H$ -Gitter  $M$  gilt:

$$\text{Ind}_H^G(\text{End}_\theta(M)) \cong \text{End}_\theta(\text{Ind}_H^G(M))$$

als innere  $G$ -Algebren. □

Zum Schluss dieser Induktions-Beschreibung halten wir noch folgende Bezeichnungsweise fest:

Den Exomorphismus  $\mathcal{D}_H^G$ , der den Homomorphismus innerer  $G$ -Algebren

$$d_H^G : \mathfrak{B} \rightarrow \text{Res}_H^G(\text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})), \mathfrak{b} \mapsto 1 \otimes \mathfrak{b} \otimes 1$$

enthält, nennen wir die **kanonische Einbettung** von  $\mathfrak{B}$  in seine induzierte Algebra.

Aus der Modul-Theorie ist uns die Bedeutung der Induktion (und der Einschränkung), insbesondere im Hinblick auf die Green-Korrespondenz, wohl bekannt. In der Tat sehen wir, dass in diesem allgemeineren Konzept auch tiefe Aussagen über gewisse Korrespondenzen gelingen, die im speziellen Fall wieder das Altbekannte aufdecken.

#### 4.6.3 Satz (vgl. [Thé95, Thm. 17.2])

Es seien  $\mathfrak{A}$  eine innere  $G$ -Algebra und  $H \leq G$ . Zudem sei

$$\mathcal{D}_H^G : \text{Res}_H^G(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Res}_H^G(\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(\mathfrak{A})))$$

die kanonische Einbettung von  $\text{Res}_H^G(\mathfrak{A})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathfrak{A}$  ist relativ projektiv zu  $H$ , d.h.  $1_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}_H^G$ .
- (b) Es gibt einen Exomorphismus  $\mathcal{F} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(\mathfrak{A}))$  mit  $\text{Res}_H^G(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_H^G$ .

- (c) Es existiert eine Einbettung  $\mathcal{E} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{Ind}_H^G(\mathfrak{B})$  für eine innere  $H$ -Algebra  $\mathfrak{B}$ .

Sind diese Eigenschaften erfüllt, dann ist der Exomorphismus  $\mathcal{F}$  eine Einbettung und eindeutig.  $\square$

Man beachte die völlige Analogie zu Higman's Kriterium für relative Projektivität von Moduln (vergleiche [Lan83, Cor. 2.4]). Tatsächlich ist Higman's Kriterium nur ein Spezialfall von obigem Satz (vergleiche [Thé95, Cor. 17.3]). Insbesondere sind Projektivität auf der Ebene der  $\theta G$ -Moduln und derjenigen der  $G$ -Algebren äquivalent. Denn Korollar 17.3 in [Thé95] sagt, dass ein  $\theta G$ -Modul  $M$  genau dann projektiv ist, wenn die  $G$ -Algebra  $\text{End}_\theta(M)$  projektiv ist.

## 4.7 Defektttheorie

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra über  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  für einen kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Wir fixieren eine punktierte Gruppe  $H_\alpha$  von  $\mathfrak{A}$ .

### 4.7.1 Definition (punktierte Defektgruppe, Quelle)

Eine **punktierte Defektgruppe** oder schlicht ein **Defekt** von  $H_\alpha$  ist eine lokal punktierte Gruppe  $Q_\gamma$ , die  $H_\alpha \geq Q_\gamma$  und  $H_\alpha p r Q_\gamma$  erfüllt. Die Gruppe  $Q$  nennen wir in diesem Fall **Defektgruppe** und den Punkt  $\gamma$  **Quellenpunkt** von  $H_\alpha$ . Die lokalisierte  $Q$ -Algebra  $\mathfrak{A}_\gamma$  (vergleiche Definition 4.4.1) heißt **Quellenalgebra** von  $H_\alpha$ .

Beachte, dass für eine fixierte Defektgruppe  $Q$  die Quellenpunkte von  $H_\alpha$  in  $N_G(Q)$  konjugiert sind. Aus diesem Grund sind auch alle Quellenalgebren  $\mathfrak{A}_\gamma$  zu gegebener Defektgruppe nicht bis auf Isomorphie, sondern nur bis auf  $N_G(Q)$ -Konjugation eindeutig bestimmt. Ist nämlich  $g \in N_G(Q) \setminus N_G(Q_\gamma)$ , dann sind zwar  $(\mathfrak{A}_\gamma)^g$  und  $\mathfrak{A}_{\gamma g}$  als  $\theta$ -Algebren isomorph, aber die  $Q$ -Algebra-Struktur ist womöglich verschieden.

Ist  $M$  ein unzerlegbares  $\theta G$ -Gitter, so ist die Algebra  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(M)$  primitiv und hat genau eine punktierte Gruppe der Form  $G_\alpha$  mit  $\alpha = \{1_{\mathfrak{A}}\}$ . Ist  $Q_\gamma$  ein Defekt von  $G_\alpha$ , so ist die zugehörige Defektgruppe ein Vertex von  $M$ . Ist  $j \in \gamma$  ein Idempotent, so ist das unzerlegbare  $\theta Q$ -Gitter  $jM$  eine Quelle von  $M$ .

Zur Charakterisierung von Defekten schauen wir auf folgenden Satz:

### 4.7.2 Satz (vgl. [Thé95, Thm. 18.3])

- (a) Ein Defekt von  $H_\alpha$  existiert.
- (b) Alle Defektgruppen von  $H_\alpha$  sind in  $H$  konjugiert.
- (c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $Q_\gamma$  ist ein Defekt von  $H_\alpha$ .
- (ii)  $Q_\gamma$  ist bzgl. „ $\geq$ “ eine minimale punktierte Gruppe mit  $H_\alpha \text{pr} Q_\gamma$ .
- (iii)  $Q_\gamma$  ist bzgl. „ $\geq$ “ eine maximale punktierte Gruppe, so dass  $Q_\gamma$  lokal ist und  $H_\alpha \geq Q_\gamma$  erfüllt.
- (iv)  $H_\alpha \text{pr} Q_\gamma$  und  $\text{br}_{Q^H}(\alpha) \neq 0$ .
- (v)  $Q_\gamma$  ist lokal,  $H_\alpha \geq Q_\gamma$  und  $H_\alpha$  ist relativ projektiv zu  $P$ .

Die Defekte von  $H_\alpha$  sind in  $H$  konjugiert. □

Um ein anschaulicheres Verständnis von einem Defekt von  $H_\alpha$  zu gewinnen, halten wir folgende Beobachtungen fest. Zum einen haben wir eine Abwärtsbewegung in dem Sinne, dass wir unter allen punktierten Gruppen nur die bzgl. „ $\text{pr}$ “ minimalen betrachten. Unter diesen lokal punktierten Gruppen wählen wir nur die weiter aus, die bzgl. „ $\geq$ “ in  $H_\alpha$  enthalten sind. Jetzt machen wir wieder eine Art Aufwärtsbewegung, weil unter den letzt genannten genau die bezüglich „ $\geq$ “ maximalen Defekte von  $H_\alpha$  sind.

Weil unsere Anwendung vor allem auf den speziellen Fall  $\mathfrak{A} = \text{End}_\theta(M)$  für ein  $\theta G$ -Gitter  $M$  zielt, fassen wir das Zusammenspiel zwischen  $G$ -Algebren- und Modul-Theorie noch einmal zusammen:

#### 4.7.3 Bemerkung

Es sei  $\mathfrak{A} = \text{End}_\theta(M)$  für ein  $\theta G$ -Gitter  $M$ . Alle Moduln, die  $Q$  als unteren Index tragen, verstehen wir als die auf  $\theta Q$  eingeschränkten Moduln. Hat ein Modul hingegen einen Punkt  $\alpha$  als Index, so verstehen wir darunter einen Vertreter der Isomorphieklasse  $jM$  mit  $j \in \alpha$  (vergleiche Definition 4.5.3).

Dann korrespondieren die punktierten Gruppen  $G_\alpha$  und  $Q_\gamma$  von  $\mathfrak{A}$  zu direkten Summanden  $M_\alpha$  und  $M_\gamma \cong \mathfrak{f}M_Q$  für ein  $\mathfrak{f} \in \gamma$ . Es ist  $G_\alpha \geq Q_\gamma$  genau dann, wenn  $M_\gamma$  ein direkter Summand von  $(M_\alpha)_Q$  ist. Weiterhin ist  $G_\alpha \text{pr} Q_\gamma$  genau dann, wenn  $M_\alpha$  ein direkter Summand von  $M_\gamma^G$  ist. Außerdem ist  $Q_\gamma$  genau dann lokal, wenn  $Q$  ein Vertex von  $M_\gamma$  ist. Schließlich ist  $Q_\gamma$  genau dann ein Defekt von  $G_\alpha$ , wenn die obigen drei Eigenschaften simultan erfüllt sind.

Im speziellen Fall von primitiven  $G$ -Algebren (den wir in dem für uns interessanten Fall  $\mathfrak{A} = \text{End}_\theta(M)$  für ein unzerlegbares  $\theta G$ -Gitter finden) gibt es eine einfache Charakterisierung von Defektgruppen.

#### 4.7.4 Lemma (vgl. [Thé95, Prop. 18.6])

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine primitive  $G$ -Algebra. Dann ist eine bezüglich „ $\geq$ “ maximale Untergruppe  $Q$  mit  $\overline{\mathfrak{A}}(Q) \neq 0$  eine Defektgruppe von  $\mathfrak{A}$ . □

## 4.8 Defektttheorie bei Permutationsmoduln

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra. Zudem sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  für einen kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Es sei  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ . Wir wollen diesen Abschnitt für unseren speziellen Fall eines direkten Summanden von  $\theta_P^G$  reservieren. Der Modul  $\theta_P^G$  ist nämlich insbesondere ein so genanntes  $p$ -Permutationsgitter, d.h. ein  $\theta G$ -Gitter mit einer  $P$ -invarianten Basis  $\mathcal{B}$ . Beachte, dass diese Basis auch invariant unter  $Q \leq P$  ist. Die folgenden Aussagen formulieren wir daher für den allgemeinen Fall eines  $p$ -Permutationsgitters  $M$ .

### 4.8.1 Lemma (vgl. [Thé95, Prop. 27.6])

Es seien  $Q \leq P$  und  $M$  ein  $p$ -Permutations-Gitter mit  $P$ -invarianter Basis  $\mathcal{B}$ . Dann gilt:

- (a) Der Brauer-Quotient  $\overline{M}(Q)$  hat eine  $\theta$ -Basis der Form

$$br_Q(\text{Fix}_Q(\mathcal{B})) := \{br_Q(x) : x \in \text{Fix}_Q(\mathcal{B})\}.$$

Alle Summen von nicht-trivialen  $Q$ -Bahnen auf  $\mathcal{B}$  liegen im Kern von  $br_Q$ .

- (b)  $\overline{M}(Q)$  ist ein  $k\overline{N}_G(Q)$ -Modul mit  $P_{N_G(Q)}$ -invarianter Basis, wobei  $P_{N_G(Q)} \in \text{Syl}_p(N_G(Q))$  ist. Beachte, dass  $Q \leq P_{N_G(Q)}$  gilt.

- (c) Es gilt

$$\overline{\text{End}_\theta(M)}(Q) \cong \text{End}_k(\overline{M}(Q))$$

als  $\overline{N}_G(Q)$ -Algebren.

- (d) Ist  $\text{Fix}_Q(\mathcal{B}) = \emptyset$ , so hat  $\text{End}_\theta(M)$  keine lokalen Punkte. Andernfalls gibt es genau einen lokalen Punkt  $\gamma \in \mathcal{LP}(\text{End}_\theta(M))$ . Dieser Punkt hat die Multiplizitätsalgebra  $\mathfrak{S}(\gamma) = \overline{\text{End}_\theta(M)}(Q)$  und die kanonische Surjektion  $\pi_\gamma : \text{End}_{kQ}(M) \rightarrow \mathfrak{S}(\gamma)$  fällt mit dem Brauer-Homomorphismus zusammen.  $\square$

### 4.8.2 Korollar ([Thé95, Prop. 27.7, Cor. 27.8])

Es sei  $M$  wie in Lemma 4.8.1.

- (a) Es sei  $M$  zusätzlich unzerlegbar. Dann ist jede maximale Untergruppe  $Q$  mit  $\overline{M}(Q) \neq 0$  ein Vertex von  $M$ .
- (b) Es sei  $\mathfrak{A} := \text{End}_\theta(M)$ . Falls  $P_\gamma$  eine lokal punktierte Gruppe von  $\mathfrak{A}$  ist, dann ist der Multiplizitätsmodul von  $\gamma$  ein Modul über der (ungetwisteten) Gruppenalgebra  $k\overline{N}_G(P)$  und isomorph zu  $\overline{M}(Q)$ .  $\square$

Hier also sehen wir, dass sich unter den gegebenen Voraussetzungen die  $k\overline{N}_G(Q)$ -Modulstruktur von  $\overline{M}(Q)$  als innere  $\overline{N}_G(Q)$ -Algebrenstruktur in  $\text{End}_k(\overline{M}(Q)) \cong \overline{\text{End}_\theta(M)}(Q)$  widerspiegelt.

Ist  $Q$  ein Vertex von  $M$ , so gilt  $\overline{\text{End}_\theta(M)}(Q) \cong \mathfrak{S}(\gamma)$ , so dass auch die Multiplizitätsalgebra eine innere  $\overline{N}_G(Q)$ -Algebrenstruktur trägt. Der Multiplizitätsmodul von  $\mathfrak{S}(\gamma)$  ist also  $\overline{M}(Q)$  und dieser ist tatsächlich ein  $k\overline{N}_G(Q)$ -Modul (statt wie im allgemeinen Fall ein Modul über einem gewisteten Gruppenring wie in Abschnitt 4.4).

Ab jetzt sei  $M := \theta_P^G$ . Wir wollen Lemma 4.8.1 direkt auf  $M$  anwenden.

### 4.8.3 Bemerkung

Es seien  $M = \theta_P^G$  und eine Untergruppe  $Q$  mit  $1 \neq Q \leq P$  gegeben. Wir betrachten die  $P$ -invariante Basis  $\mathcal{B} := \{1 \otimes_P x : x \in [P \setminus G]\}$  von  $M$ , wobei  $[P \setminus G]$  ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von  $P$  in  $G$  bezeichnet. Dann ergibt sich für die Bestimmung der  $Q$ -invarianten Basiselemente darin:

$$\begin{aligned} & 1 \otimes_P xq = 1 \otimes_P x \text{ für alle } q \in Q \\ \iff & 1 \otimes_P xqx^{-1} = 1 \otimes_P 1 \text{ für alle } q \in Q \\ \iff & xQx^{-1} \subseteq P. \end{aligned}$$

Wir suchen also unter den Nebenklassenvertretern von  $P$  in  $G$  diejenigen, die zusätzlich  $xQx^{-1} \subseteq P$  erfüllen.

Bilden die  $p$ -Sylogruppen ein T.I.-System, so kann diese Bedingung nur für  $x \in N_G(P)$  erfüllt sein. Ist  $x \in N_G(P) \cap [P \setminus G]$  ein solcher Nebenklassenvertreter, so auch jedes weitere Element in  $Px$ , so dass die  $Q$ -Invarianz eines Basiselements unabhängig von der Wahl des Repräsentanten in  $[P \setminus G]$  ist. Damit ergibt sich im Fall eines T.I.-Systems  $\text{Fix}_Q(\mathcal{B}) = \{1 \otimes_P x : x \in [P \setminus G] \cap N_G(P)\}$ .

Den Fall einer zyklischen  $p$ -Sylogruppe wollen wir in dieser Hinsicht auch diskutieren. Dann gilt nämlich sogar

$$Q \leq P \leq N_G(P) \leq N_G(Q),$$

denn wäre  $x \in N_G(P) \setminus N_G(Q)$ , so hätte  $P$  zwei verschiedene Untergruppen der Ordnung  $|Q|$ . Damit ist auch im zyklischen Fall  $\text{Fix}_Q(\mathcal{B}) = \{x \in [P \setminus G] \cap N_G(P)\}$ . Für den allgemeinen Fall führen wir die Bezeichnungen  $T(Q, P) := \{x \in [P \setminus G] : Q^{x^{-1}} \subseteq P\}$  ein, die wir auch weiter unten nochmal benutzen werden. Dann gilt  $\text{Fix}_Q(\mathcal{B}) = T(Q, P)$ .

M. Cabanes hat in [Cab84] eine explizite Beschreibung für das Bild des Brauer-Homomorphismus angegeben, welche  $k$ -Basen benutzt. Dazu hat er zunächst eine geeignete Zerlegung für  $M_{N_G(Q)}$  gefunden, die Korollar 4.8.2 aufnimmt und explizit interpretiert. Sei ab jetzt  $\theta = k$ .

**4.8.4 Lemma ([Cab84, Prop. 1])**

Es sei  $Q \leq P$  gegeben. Weiter seien  $N := N_G(Q)$  und  $M$  ein  $kN$ -Gitter, das zusätzlich ein  $p$ -Permutations-Gitter ist. Dann gibt es eine Zerlegung von  $M$  als  $kG$ -Moduln der Form

$$M_1 \oplus M_2,$$

so dass Folgendes gilt:

- (a)  $\overline{M}_2(Q) = 0$ .
- (b)  $\text{Fix}_Q(M_1) = M_1$ .
- (c)  $\sum_{R < Q} M_R^Q = \text{Fix}_Q(M_2)$ .
- (d)  $\sum_{R < Q} (\text{End}_k(M))^Q_R = \{\varphi \in \text{End}_k(M) : \varphi(M_1) \subseteq M_2\}$ .

Außerdem ist in diesem Fall  $\overline{M}(Q) \cong M_1$ . Man kann  $M_1$  als direkte Summe aller Summanden, deren Vertizes die Untergruppe  $Q$  enthalten, und  $M_2$  als direkte Summe aller übrigen direkten Summanden von  $M$  wählen. Die Zerlegung ist allerdings nicht eindeutig.  $\square$

Dieses Lemma ist offensichtlich passend für die Einschränkung  $M = (k_P^G)_{N_G(Q)}$  des Permutationsmoduls  $k_P^G$  auf  $N_G(Q)$ .

Der Isomorphismus in Lemma 4.8.1(c) erlaubt, den Brauer-Homomorphismus von  $\text{End}_k(M)$  nach  $\text{End}_k(\overline{M}(Q))$  zu verstehen. Für  $\varphi \in \text{End}_k(M)$  ist das Bild  $br_Q(\varphi)$  genau die Projektion auf  $M_1$  der Restriktion von  $\varphi$  auf  $M_1$ , also von der Form  $\mathbf{e}_1 \varphi \mathbf{e}_1$ , wenn  $\mathbf{e}_1$  das zu  $M_1$  assoziierte Idempotent in  $\text{End}_k(M)$  bezeichnet.

Nach dem Satz 3.1.1 von Mackey gilt die Zerlegung

$$(k_P^G)_{N_G(Q)} = \bigoplus_{t \in [P \setminus G / N_G(Q)]} (k_{P^t \cap N_G(Q)}^{N_G(Q)}).$$

Andererseits gibt es nach [Cab84, p.7] eine Zerlegung von  $M$  als  $kN_G(Q)$ -Moduln der Form

$$M = \bigoplus_{t \in T(Q,P)} k(t \otimes 1) \quad \bigoplus_{t \in [P \setminus G] \setminus T(Q,P)} k(t \otimes 1).$$

In Kombination erhalten wir also (als  $kN_G(Q)$ -Moduln)

$$\tilde{M}_1 := \bigoplus_{t \in T(Q,P)} k(t \otimes 1) \cong \bigoplus_{t \in [P \setminus G / N_G(Q)] \cap T(Q,P)} k_{Q^t \cap N_G(Q)}^{N_G(Q)}$$

und

$$\tilde{M}_2 := \bigoplus_{t \in [P \setminus G] \setminus T(Q,P)} k(t \otimes 1) \cong \bigoplus_{t \in [P \setminus G / N_G(Q)] \setminus T(Q,P)} k_{Q^t \cap N_G(Q)}^{N_G(Q)}.$$

Dann erfüllt  $\tilde{M}_1$  die Eigenschaften von  $M_1$  und  $\tilde{M}_2$  die von  $M_2$  aus Lemma 4.8.4.

Wir fixieren die Schur-Basis  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$  von  $\text{End}_{kG}(M)$ , wie sie in Lemma 2.1.18 diskutiert wurde. Dann ist für  $1 \leq i \leq d$  das Bild  $br_Q(\varphi_i)$  (wobei  $\varphi_i$  als Element von  $\text{End}_{kN_G(Q)}(M)$  aufgefasst wird) die Projektion der Einschränkung  $\varphi|_{\tilde{M}_1}$  auf  $\tilde{M}_1$ . M. Cabanes führt einen speziellen Fall explizit aus.

#### 4.8.5 Lemma (vgl. [Cab84, Prop.2])

Es seien  $G$  eine endliche Gruppe,  $P \in \text{Syl}_p(G)$  und  $Q$  eine Untergruppe in  $P$  mit  $P \subseteq T(Q, P) = N_G(Q)$ . Zudem sei das  $p$ -Permutations-Gitter  $M := k_P^G$  gegeben. Dann ist

$$\overline{M}(Q) = k_P^{N_G(Q)}.$$

Außerdem bildet  $br_Q$  ein Element  $\varphi_i$  der Schur-Basis von  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  auf die Einschränkung  $(\varphi_i)|_{k_P^{N_G(Q)}}$  ab, falls der Index  $i$  zu einer Doppelnebenklasse korrespondiert, deren Repräsentant in  $N_G(Q)$  liegt, und auf 0 sonst.  $\square$

Beachte, dass die Voraussetzungen im vorherigen Lemma insbesondere für zyklische  $p$ -Sylowgruppen erfüllt sind.

## 4.9 Die Puig-Korrespondenz

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $\mathfrak{A}$  eine  $G$ -Algebra. Zudem sei  $\theta \in \{\mathcal{O}, k\}$  für einen kommutativen, lokalen, noetherschen Ring  $\mathcal{O}$  mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . L. Puig hat in seinen Arbeiten [Pui81] und [Pui88a] eine bijektive Korrespondenz zwischen gewissen punktierten Gruppen bewiesen. In der Tat wird sich herausstellen, dass diese Korrespondenz die Green-Korrespondenz in einem Spezialfall (nämlich  $\mathfrak{A} = \text{End}_\theta(M)$ ) bereits beinhaltet.

Wir erinnern daran, dass für eine lokal punktierte Gruppe die Multiplizitätsalgebra  $\mathfrak{S}(\gamma)$  einfach und eine  $\overline{N}_G(Q_\gamma)$ -Algebra ist (vergleiche Seite 81). Wir bezeichnen mit  $\pi_\gamma$  ab jetzt die kanonische Abbildung  $\pi_\gamma : \text{Fix}_Q(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{S}(\gamma)$ . Dann hat für  $H \geq Q$  die zusammengesetzte Abbildung

$$\pi_\gamma r_Q^H : \text{Fix}_H(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{S}(\gamma)$$

ein Bild, das in  $\text{Fix}_{\overline{N}_H(Q_\gamma)}(\mathfrak{S}(\gamma))$  enthalten ist.

#### 4.9.1 Satz (Puig-Korrespondenz, vgl. [Thé95, Thm. 19.1])

Es seien eine lokal punktierte Gruppe  $Q_\gamma$  von  $\mathfrak{A}$  und eine Untergruppe  $H$  von  $G$  mit  $H \geq Q$  gegeben. Dann induziert die Abbildung

$$\pi_\gamma r_Q^H : \text{Fix}_H(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{Fix}_{\overline{N}_H(Q_\gamma)}(\mathfrak{S}(\gamma))$$

eine bijektive Korrespondenz zwischen den Mengen

$$\begin{aligned} &\{\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A})) : Q_\gamma \text{ ist ein Defekt von } H_\alpha\} \text{ und} \\ &\{\delta \in \mathcal{P}(\text{Fix}_{\overline{N}_H(Q_\gamma)}(\mathfrak{S}(\gamma))) : \overline{N}_H(Q_\gamma)_\delta \text{ ist projektiv}\}. \end{aligned}$$

Korrespondiert  $\alpha$  bzgl. dieser Bijektion zu  $\delta$ , so induziert sie auch einen Isomorphismus zwischen den Multiplizitätsalgebren  $\mathfrak{S}(\alpha)$  und  $\mathfrak{S}(\delta)$ .

Das nachfolgende Korollar wird für uns von herausragender Relevanz sein. Es gilt nämlich:

**4.9.2 Korollar (vgl. [Thé95, Kor. 19.3])**

Es seien  $\mathfrak{A}$  eine primitive  $G$ -Algebra,  $Q_\gamma$  eine lokal punktierte Gruppe und  $V(\gamma)$  der korrespondierende Multiplizitätsmodul mit seiner Modulstruktur über der getwisteten Gruppenalgebra  $k_\#N_G(Q_\gamma)/Q$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a)  $Q$  ist eine Defektgruppe von  $\mathfrak{A}$ .
- (b)  $Q_\gamma$  ist eine punktierte Defektgruppe von  $\mathfrak{A}$ .
- (c)  $V(\gamma)$  ist unzerlegbar und projektiv.
- (d)  $V(\gamma)$  ist projektiv.
- (e)  $V(\gamma)$  hat einen nicht trivialen projektiven direkten Summanden. □

Für uns ist vor allem der Schluss von (a) nach (c) wichtig. Er liefert nämlich wichtige Informationen über die strukturellen Eigenschaften von Green-Korrespondenten der unzerlegbaren direkten Summanden von  $\theta_P^G$ .

Wie bereits angedeutet ist die Green-Korrespondenz eine Konsequenz aus der Puig-Korrespondenz. Obwohl wir die Modulversion der Green-Korrespondenz bereits in Satz 3.1.7 formuliert haben, wollen wir die allgemeinere  $G$ -Algebren-Version hier festhalten.

**4.9.3 Satz (Green-Korrespondenz, vgl. [Thé95, Thm. 20.1])**

Es sei  $Q_\gamma$  eine lokal punktierte Gruppe von  $\mathfrak{A}$ . Schließlich sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$ , die  $N_G(Q_\gamma)$  enthält. Falls  $\alpha$  ein Punkt von  $\text{Fix}_G(\mathfrak{A})$  ist, so dass  $Q_\gamma$  ein Defekt von  $G_\alpha$  ist, dann gibt es einen eindeutigen Punkt  $\beta$  von  $\text{Fix}_H(\mathfrak{A})$  mit  $G_\alpha \geq H_\beta \geq Q_\gamma$ . Daraus ergibt sich eine Bijektion zwischen den Mengen

$$\begin{aligned} & \{\alpha \in \mathcal{P}(\text{Fix}_G(\mathfrak{A})) : Q_\gamma \text{ ist ein Defekt von } G_\alpha\} \text{ und} \\ & \{\beta \in \mathcal{P}(\text{Fix}_H(\mathfrak{A})) : Q_\gamma \text{ ist ein Defekt von } H_\beta\}. \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Multiplizitätsalgebren  $\mathfrak{S}(\alpha)$  und  $\mathfrak{S}(\beta)$  zu korrespondierenden Punkten  $\alpha$  und  $\beta$  isomorph. Schließlich gilt  $G_\alpha \text{pr} H_\beta$ . □

Weitere Ergebnisse wie der Satz 3.1.8 von Burry-Carlson-Puig lassen sich natürlich auch in diesem allgemeineren Kontext formulieren.

Wir wollen einen Blick auf „unseren“ Fall werfen, und fixieren für  $\theta = k$  einen unzerlegbaren direkten Summanden  $W$  von  $k_P^G$ . Dieser habe einen Vertex  $Q$  und den Green-Korrespondenten  $U$  in  $N_G(Q)$ . Dann gilt

**4.9.4 Lemma** ([Thé95, pp. 225/226])

Ist  $\theta = k$ , so ist der Green-Korrespondent  $U$  von  $W$  genau der Brauer-Quotient  $\overline{W}(Q)$ .  $\square$

Nach Korollar 4.9.2 und 4.8.2 ist  $\overline{W}(Q)$  ein unzerlegbarer und projektiver  $k\overline{N}_G(Q)$ -Modul. Wir müssen bei der Untersuchung, ob der Green-Korrespondent eines unzerlegbaren direkten Summanden  $W$  von  $k_P^G$  ein Gewicht ist, also „nur“ noch feststellen, ob  $\overline{W}(Q)$  als  $\overline{N}_G(Q)$ -Modul einfach ist.

Die Tatsache, dass der Green-Korrespondent  $U$  von  $W$  den Vertex  $Q$  im Kern hat und projektiv als  $kN_G(Q)/Q$ -Modul ist, ergibt sich bereits aus der „klassischen Theorie“ aus Kapitel 3. Der Modul  $W$  hat nämlich eine triviale Quelle, also auch sein Green-Korrespondent  $U$ . Damit liegt  $Q$  im Kern von  $U$  und  $U$  hat eine  $kN_G(Q)/Q$ -Modulstruktur. Weil  $Q$  Vertex von  $U$  ist, ist  $U$  sogar ein projektiver  $kN_G(Q)/Q$ -Modul.

Für zwei spezielle Fälle gilt sogar die Einfachheit.

**4.9.5 Lemma**

Es sei  $W$  ein nicht-projektiver, unzerlegbarer direkter Summand von  $k_P^G$  mit Vertex  $Q$ .

- (a) Ist  $Q$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ , so ist der Multiplizitätsmodul  $\overline{W}(Q)$  einfach.
- (b) Ist  $N_G(Q)$  eine  $p$ -Gruppe, dann ist der Multiplizitätsmodul  $\overline{W}(Q)$  einfach.

**Beweis:** Wir betrachten den  $k\overline{N}_G(Q)$ -Modul  $T(\overline{W}(Q)) := \overline{W}(Q)/\text{rad}(\overline{W}(Q))$  mit Vertex  $\overline{Q}$ . Weil  $\overline{W}(Q)$  ein projektiver und unzerlegbarer  $k\overline{N}_G(Q)$ -Modul ist (Lemma 4.9.4), ist  $T(\overline{W}(Q))$  einfach. Beachte, dass  $\overline{W}(Q)$  die projektive Hülle von  $T(\overline{W}(Q))$  ist.

- (a) Die Gruppe  $N_G(Q)/Q$  ist eine  $p'$ -Gruppe, so dass alle unzerlegbaren, projektiven Moduln einfach sind. Weil  $W$  und  $\overline{W}(Q)$  triviale Quelle haben, operiert  $Q$  trivial auf  $\overline{W}(Q)$ . Damit folgt aber  $\overline{W}(Q) = T(\overline{W}(Q))$ , also die Behauptung.
- (b) Wir wollen für den Beweis dieser Aussage nicht den Terminologieapparat über fast zerfallenden Sequenzen oder Auslander-Reiten-Sequenzen ausrollen. Man vergleiche dazu [Thé95, Sec. 31-36]. Einen Beweis zu dieser Aussage lieferte bereits J. A. Green in [Gre85]. Wir bemerken hier nur, dass in diesem Fall  $Q/Q$  die Defektgruppe von  $T(\overline{W}(Q))$  ist, woraus die Projektivität dieses Moduls und damit die Gleichheit mit  $\overline{W}(Q)$  folgt.  $\square$

**4.9.6 Bemerkung**

(a) Alperins Gewichtsvermutung ist damit für eine sehr spezielle Klasse von Gruppen bewiesen. Ist nämlich  $G$  eine Gruppe mit  $p$ -Sylowgruppe  $P$ , so dass der Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  quasi-Frobenius ist und sämtliche unzerlegbaren

nicht-projektiv-einfachen direkten Summanden von  $k_P^G$  einen Vertex mit den Eigenschaften aus Lemma 4.9.5 haben, so ist jeder unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$  ein Gewichts-Green-Korrespondent. Nach den Überlegungen von Seite 68 ist das die äquivalente Formulierung zu Alperins Gewichtsvermutung im quasi-Frobenius-Fall. (b) Die einzige Eigenschaft, die wir im quasi-Frobenius-Fall für Alperins Vermutung in dem speziellen Fall in (a) benutzt haben, ist die Ungleichung (3.3) auf Seite 68. Beginnen wir nun umgekehrt mit einer Gruppe, deren sämtliche unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  die Eigenschaften (a) oder (b) in Lemma 4.9.5 erfüllen, so ist jeder unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$  ein Gewichtsmodul. Setzen wir zusätzlich voraus, dass jeder unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$  einen einfachen Sockel hat, so folgt die Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\{\text{einfache } kG\text{-Moduln}\}| &\leq |\{\text{unzerlegbare direkte Summanden von } k_P^G\}| \\ &= |\{\text{Gewichte}\}| \end{aligned}$$

(jeweils bis auf Isomorphie und Äquivalenz).



# Kapitel 5

## Rechnerische Ergebnisse

### 5.1 Zur Berechnung von Green-Korrespondenten

Wir fixieren für diesen Abschnitt eine endliche Gruppe  $G$  und einen Körper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Auch wenn die theoretischen Überlegungen meistens einen algebraisch abgeschlossenen Körper voraussetzen, werden die konkreten Rechnungen über einem endlichen Körper der Charakteristik  $p$  durchgeführt, der aber groß genug ist, dass der Gruppenring  $kG$  und die betrachteten Moduln bezüglich des Körpers alle gewünschten Voraussetzungen erfüllen. Daher sei  $k$  ein endlicher Körper, der salopp gesprochen groß genug ist, so dass alle nötigen Eigenschaften erfüllt sind.

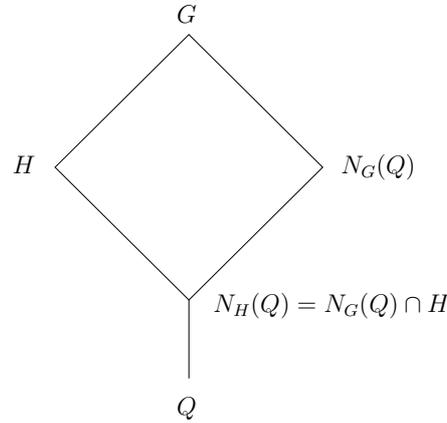
Übersteigt die Dimension eines  $kG$ -Moduls die Größenordnung  $\sim 5000 - 8000$ , so kann die MeatAxe mit den gegebenen Rechnerleistungen ohne vorherige Kondensation die Moduln kaum noch in unzerlegbare direkte Summanden zerlegen. M. Szöke hat in ihrer Dissertation Kondensationstechniken entwickelt, mit Hilfe derer sie Moduln zerlegte, deren Dimension von der Größenordnung  $10^5$  war. In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Methode, mit deren Hilfe wir auch für größere Gewichtsmodule (der Dimension höher als 5000) die Gewichts-Green-Korrespondenten bestimmen konnten, ohne kondensieren zu müssen.

Grundlegend dafür ist ein Ergebnis aus D.W. Burrys Arbeit [Bur82]. Darin erweitert er die Green-Korrespondenz, indem er auf Einschränkungen wie  $H \geq N_G(Q)$  für einen Vertex  $Q$  (vergleiche Satz 3.1.7) verzichtet.

#### 5.1.1 Satz (vgl. [Bur82, Thm. 4.2])

*Es seien  $H \leq G$  eine beliebige Untergruppe von  $G$  und  $Q$  eine  $p$ -Untergruppe von  $H$ . Es sei  $V$  ein unzerlegbarer  $kH$ -Modul. Dann induziert die Green-Korrespondenz eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen den unzerlegbaren direkten Summanden von  $V^G$  mit Vertex  $Q$  und den unzerlegbaren direkten Summanden von  $(V_{N_H(Q)})^{N_G(Q)}$  mit Vertex  $Q$ .  $\square$*

Abbildung 5.1: Diagramm zum Satz von Burry



Im Kern des Beweises werden die Green-Korrespondenz (in der alt bekannten Form 3.1.7) sowohl zwischen  $H$  und  $N_H(Q)$  als auch zwischen  $G$  und  $N_G(Q)$  und der Satz von Mackey (Satz 3.1.1) benutzt.

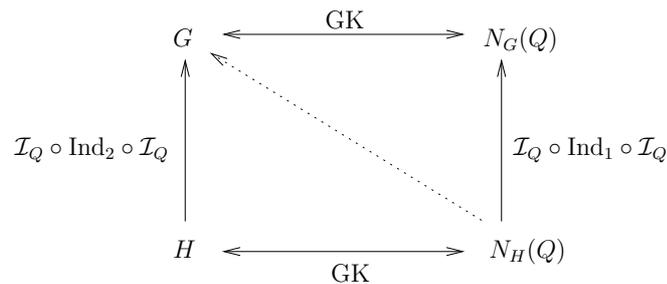
Wir benutzen den vorherigen Satz, um die Induktionen nur über einen kleineren Index berechnen zu müssen. Dazu fixieren wir eine Untergruppe  $H$  von  $G$ , die  $Q$  enthält, also  $Q \leq H \leq G$ . Zur Veranschaulichung betrachten wir Abbildung 5.1. Man beginnt mit einem unzerlegbaren  $kN_H(Q)$ -Modul  $V$  mit Vertex  $Q$ , von dem man weiß, dass ein Gewichtsmodul  $S$  von  $G$  (!) als direkter Summand in  $V^{N_G(Q)}$  vorkommt. Von  $V$  muss dann der Green-Korrespondent  $U$  in  $H$  (!) bestimmt werden. Entweder ist der Green-Korrespondent aus (anderen) theoretischen Überlegungen bekannt (wie beim folgenden Beispiel  $J_2$  in Charakteristik 5) oder die Induktion von  $N_H(Q)$  nach  $H$  muss explizit durchgeführt werden. Im Allgemeinen ist nämlich der Index  $|H : N_H(Q)|$  kleiner als  $|G : N_G(Q)|$ . Anschließend wird der Green-Korrespondent  $U$  von  $H$  nach  $G$  induziert. Nach dem Satz von Burry findet man den Gewichts-Green-Korrespondenten von  $S$  in der Zerlegung von  $U^G$ .

Ist  $Q = P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ , so vereinfacht sich die Situation. Dann sind nämlich alle einfachen Moduln von  $N_H(P)/P$  Gewichtsmoduln von  $H$ . Induziert man einen solchen, etwa  $S$ , nach  $N_G(P)$ , so zerlegt sich  $S^{N_G(P)}$  in Gewichtsmoduln von  $G$  (weil  $N_G(P)/P$  halbeinfach ist). Auf diese Weise finden wir durch die Anwendung des Satzes von Burry Gewichts-Green-Korrespondenten von Gewichten, die in  $S^{N_G(P)}$  vorkommen, als unzerlegbare direkte Summanden von  $S^G$ . Mit Lemma 3.3.14 lassen sich diese Gewichts-Green-Korrespondenten leicht identifizieren.

Wir haben die Situation in Abbildung 5.2 veranschaulicht. Darin seien mit  $\mathcal{I}_Q$  die Abbildung bezeichnet, die einen Modul auf die direkte Summe seiner unzerlegbaren direkten Summanden mit Vertex  $Q$  abbildet,  $\text{Ind}_1$  die Induktion von  $N_H(Q)$

nach  $N_G(Q)$ ,  $\text{Ind}_2$  die Induktion von  $H$  nach  $G$ . Schließlich ist GK die Abkürzung für Green-Korrespondenz.

Abbildung 5.2: Green-Korrespondenz und der Satz von Burry



Die obigen Erkenntnisse werden im Rest des Abschnitts auf die Beispiele  $G = J_2$ ,  $p = 5$  und  $G = A_8$ ,  $p = 3$  mit jeweils  $P = Q \in \text{Syl}_p(G)$  angewendet.

$G = J_2$ ,  $p = 5$ : Die 5-Sylowgruppe  $P$  von  $G$  ist von der Form  $C_5 \times C_5$  und hat einen Normalisator in  $G$  von der Form  $N := N_G(P) = P : D_{12}$ . In  $G$  finden wir zudem die maximale Untergruppe  $H$  der Form  $A_5 \times D_{10}$ , die die 5-Sylowgruppe  $P$  enthält. Der Normalisator der 5-Sylowgruppe in  $H$  hat die Struktur  $N_H(P) = D_{10} \times D_{10}$ . Beachte, dass  $|G : H| = 1008$  ist, während  $|G : N_G(P)| = 2016$  gilt, also einen doppelt so großen Index hat. Für die Induktionen ist dieser Faktor ausschlaggebend, was die Kapazität und Berechenbarkeit der Summenzerlegungen betrifft.

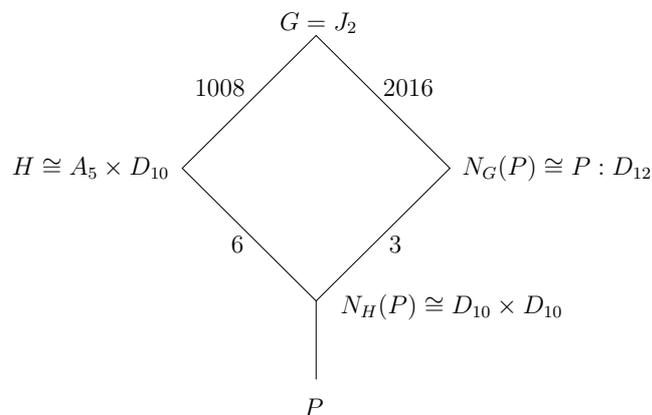


Abbildung 5.3: Anwendung des Satzes von Burry

Wir beginnen mit  $N_H(P)/P$ . Diese Gruppe ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe  $V_4 = C_2 \times C_2$ , die genau vier lineare Charaktere,  $1 \boxtimes 1, 1 \boxtimes 1^-, 1^- \boxtimes 1, 1^- \boxtimes 1^-$ , besitzt. Via Inflation betrachten wir diese Charaktere als solche von  $N_H(P)$ . Diese können wir wiederum nach  $N_G(P)$  induzieren und erhalten Charaktere, die  $P$  im Kern enthalten. Wir können also  $N_G(P)/P \cong D_{12}$  betrachten. Diese Gruppe hat wiederum vier lineare gewöhnliche Charaktere, die wir mit  $1, 1^-, \lambda, \lambda^-$  bezeichnen, und zwei vom Grad 2, nämlich  $2, 2'$ . Dabei ist die Notation so gewählt, dass  $2$  das Zentrum von  $D_{12}$  im Kern hat,  $2'$  jedoch nicht. Die Zerlegungen der von  $N_H(P)$  nach  $N_G(P)$  induzierten linearen Charaktere haben wir wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} (1 \boxtimes 1)^N &= 1 + 2, \\ (1 \boxtimes 1^-)^N &= \lambda^- + 2', \\ (1^- \boxtimes 1)^N &= \lambda + 2', \\ (1^- \boxtimes 1^-)^N &= 1^- + 2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es sei  $k$  ein endlicher Körper der Charakteristik 5, der groß genug ist, damit alle vorkommenden einfachen Moduln absolut einfach sind.

Jeder  $kD_{12}$  Modul, dessen Charakter  $1, 2, 2', \lambda$  oder  $\lambda^-$  ist, ist ein Gewichtsmodul von  $G = J_2$  mit Vertex  $P$ . Wir erwarten also nach der Anwendung des Satzes von Burry Summen von unzerlegbaren nach  $G$  induzierten  $kH$ -Moduln, die die obige Summenzerlegung widerspiegeln.

Wie in Abbildung 5.1 ersichtlich, beginnen wir mit einem (linearen) Charakter von  $N_H(P)$ . Der Einfachheit halber seien die korrespondierenden Moduln (der Dimension 1) in Charakteristik 0 und in Charakteristik 5 gleich bezeichnet. Zuerst muss der Green-Korrespondent dieses Moduls in  $kH$  bestimmt werden. Wegen der speziellen Struktur ( $N_H(P) \cong D_{10} \times D_{10}$  und  $H \cong A_5 \times D_{10}$ ), können wir die Green-Korrespondenz faktorweise finden, d.h. hier muss nur die Green-Korrespondenz zwischen den auftretenden  $kD_{10}$ -Moduln und den  $kA_5$ -Moduln geklärt werden. Die trivialen Moduln sind offensichtlich Green-Korrespondenten. Der andere einfache  $kD_{10}$ -Modul  $1^-$  hat als Green-Korrespondenten den uniserialen  $kA_5$ -Modul  $\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}$ . Die daraus zusammengesetzten Green-Korrespondenten

in  $kH$  werden nach  $kG$  induziert und zerlegt. Gemäß Lemma 3.3.14 finden wir schließlich die Gewichts-Green-Korrespondenten.

Mit  $Y$  werden stets bzgl. der Green-Korrespondenz irrelevante Moduln zusammengefasst. Die Gewichts-Green-Korrespondenten werden in Fettschrift hervorgehoben und zunächst mit ihrer Dimension bezeichnet. Dahinter wird ihre Sockelreihe angegeben.

$$\begin{aligned}
(1 \boxtimes 1)_H^G &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{442} \oplus Y &= 1 \oplus \begin{bmatrix} 14 \oplus 85 \\ 14 \oplus 41 \oplus 189 \\ 14 \oplus 85 \end{bmatrix} \oplus Y, \\
(1 \boxtimes 1^-)_H^G &= \mathbf{42} \oplus \mathbf{826} \oplus Y &= \begin{matrix} 21 \\ 21 \end{matrix} \oplus \begin{bmatrix} 189 \\ 14 \oplus 21 \oplus 189 \\ 14 \oplus 21 \oplus 189 \\ 189 \end{bmatrix} \oplus Y,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \boxtimes 1)_H^G &= \mathbf{42} \oplus \mathbf{1666} \oplus Y = \begin{matrix} 21 \\ 21 \end{matrix} \oplus \begin{bmatrix} 21 \oplus 41 \oplus 189 \\ 1 \oplus 14 \oplus 21^3 \oplus 41 \oplus 85 \oplus 189^2 \\ 1 \oplus 14 \oplus 21^3 \oplus 41 \oplus 85 \oplus 189^2 \\ 21 \oplus 41 \oplus 189 \end{bmatrix} \oplus Y, \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \boxtimes 1^-)_H^G &= \mathbf{442} \oplus \mathbf{666} \oplus Y = \begin{matrix} 189 \\ 14 \oplus 85 \oplus 189 \\ 189 \end{matrix} \oplus \begin{bmatrix} 14 \oplus 85 \\ 14 \oplus 41 \oplus 189 \\ 14 \oplus 85 \end{bmatrix} \oplus Y.
\end{aligned}$$

Dabei korrespondieren in den Gleichungen (5.2) und (5.1) jeweils 1 zu 1, 442 zu 2, 42 zu 2', 826 zu  $\lambda$ , 1666 zu  $\lambda^-$  und 666 zu  $1^-$ .

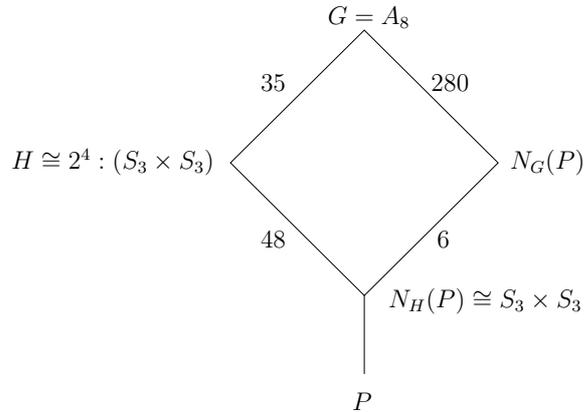
Beachte, dass diese Zerlegungen bereits in M. Szökes Dissertation [Szö98] mit anderen Methoden gefunden wurden.

Gerade diese Gruppe ist ein Beispiel dafür, dass auch bei einfachem Defektgruppen-Isomorphietyp die Zuordnung eines einfachen  $kG$ -Moduls zu Gewichten keinem offensichtlichen Prinzip folgt. In der Hoffnung, doch noch eine offensichtliche Bijektion zwischen Gewichten und einfachen  $kG$ -Moduln zu entdecken, haben wir auch die Induktionen der  $kH$ -Moduln  $3 \boxtimes 1$ ,  $3 \boxtimes 1^-$ , und  $\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \boxtimes 1$  nach  $G$  untersucht. Die Struktur der unzerlegbaren direkten Summanden dieser induzierten  $kG$ -Moduln (wie zum Beispiel Radikal- und Sockelreihe) ist kompliziert und enthüllt in dieser Hinsicht keine einfache Korrelation.

$G = A_8$ ,  $p = 3$ : Es sei  $k$  ein endlicher Körper der Charakteristik 3, der groß genug ist, dass die üblichen Voraussetzungen für die auftretenden Gruppenalgebren erfüllt sind (vergleiche Beginn des Abschnitts). Wir fixieren die Untergruppe  $L := \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (5, 6)(7, 8), (5, 7)(6, 8) \rangle \leq G$ , die isomorph

zur Kleinschen Gruppe  $V_4$  ist. Den Normalisator  $N_G(L)$  bezeichnen wir mit  $H$ . Dann ist  $H$  vom Typ  $2^4 : (S_3 \times S_3)$  und hat  $576 = 2^6 \cdot 3^2$  Elemente. Es sei  $P$  eine 3-Sylowgruppe von  $G$ , die in  $H$  liegt. Offensichtlich gilt  $P \cong C_3 \times C_3$ . Wir betrachten den Normalisator von  $P$  in  $H$ , für den  $N_H(P) \cong S_3 \times S_3$  gilt. Die Abbildung 5.4 veranschaulicht die Situation.

Abbildung 5.4:  $A_8$  in Charakteristik 3



Im Normalisator  $N_H(P)$  gibt es in Charakteristik 3 genau vier Charaktere,  $1 \boxtimes 1$ ,  $1 \boxtimes 1^-$ ,  $1^- \boxtimes 1$  und  $1^- \boxtimes 1^-$ , die  $P$  im Kern haben. Von den korrespondierenden  $kN_H(P)$ -Moduln müssen wir die Green-Korrespondenten in  $kH$  bestimmen. Die mit  $2^4$  bezeichnete Untergruppe ist normal in  $H$  und es gilt  $H/2^4 \cong N_H(P)$ . Deshalb sind die Inflationen über  $2^4$  dieser vier 1-dimensionalen Moduln die Green-Korrespondenten in  $H$ .

Als Ergebnis der von  $H$  nach  $G$  induzierten Moduln erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (1 \boxtimes 1)_H^G &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{34} = \mathbf{1} \oplus \begin{matrix} 13 \\ 1 \oplus 7 \\ 13 \end{matrix}, \\
 (1 \boxtimes 1^-)_H^G &= \mathbf{35}, \\
 (1^- \boxtimes 1)_H^G &= \mathbf{35}, \\
 (1^- \boxtimes 1^-)_H^G &= \mathbf{7} \oplus \mathbf{28}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Diese Summen können wir mit dem Satz von Burry wie folgt verstehen. Induzieren wir die gewöhnlichen Charaktere von  $N_H := N_H(P) = S_3 \times S_3$ , die  $P$  im Kern haben, nach  $N_G := N_G(P) \cong (S_3 \times S_3).2$ , so erhalten wir mit der Standard-Nummerierung in GAP:

$$\begin{aligned}\chi_{N_H,1}^{N_G} &= \chi_{N_G,1} + \chi_{N_G,2}, \\ \chi_{N_H,2}^{N_G} &= \chi_{N_G,5}, \\ \chi_{N_H,3}^{N_G} &= \chi_{N_G,5}, \\ \chi_{N_H,4}^{N_G} &= \chi_{N_G,3} + \chi_{N_G,4}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Folglich korrespondieren in den Gleichungen (5.3) und (5.4) jeweils 1 zu  $\chi_{N_G,1}$ , 34 zu  $\chi_{N_G,2}$ , 35 zu  $\chi_{N_G,5}$  und  $\{7, 28\}$  zu  $\{\chi_{N_G,3}, \chi_{N_G,4}\}$ .

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir auch die Ergebnisse von weiteren Induktionen, von denen wir strukturelle Auffälligkeiten erhofft hatten. Zum Beispiel haben wir auch die  $N_H(Q)$ -Moduln

$1 \boxtimes \begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix}$  und  $\begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix} \boxtimes \begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix}$  nach  $G$  induziert. Dabei ist der 2-dimensionale Modul  $\begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix}$  der Faktor des zu  $1^-$  gehörigen projektiven Moduls modulo seines Sockels.

Die Ergebnisse dieser beiden Induktionen sind:

$$\begin{aligned}\left( 1 \quad \boxtimes \quad \begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix} \right)^G &= 70 = \begin{matrix} 1 \oplus 13 \\ 1 \oplus 7 \\ 13 \oplus 35 \end{matrix}, \\ \left( \begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix} \quad \boxtimes \quad \begin{smallmatrix} 1^- \\ 1 \end{smallmatrix} \right)^G &= 15 \oplus 35 \oplus 90 = 15 \oplus 35 \oplus \begin{matrix} 13 \\ 1 \oplus 7 \\ 13 \oplus 35 \\ 1 \oplus 7 \\ 13 \end{matrix}.\end{aligned}$$

## 5.2 Fehlgeschlagene Versuche

Im Laufe der Untersuchung von Alperins Gewichtsvermutung kamen verschiedene Vermutungen auf, die eine konkrete Bijektion zwischen Gewichts-Green-Korrespondenten und einfachen  $kG$ -Moduln vorschlugen. Verschiedene, anfangs fruchtbar scheinende Ansätze führten allerdings nicht zum Ziel. Einige davon wollen wir hier formulieren, damit andere Interessierte nicht vergeblich Zeit investieren.

**Gewicht in Korrespondenz zum Sockel seines Gewichts-Green-Korrespondenten:** Die Zuordnung eines einfachen Sockelkonstituenten eines Gewichts-Green-Korrespondenten zu seinem Gewicht schien plausibel und wurde an vielen Beispielen bestätigt, wenn man folgende Regel beachtete.

Wir beginnen mit dem „unkomplizierten“ Fall, bei dem alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_p^G$  einen einfachen Sockel haben. Kommt ein Isomorphietyp von einfachen  $kG$ -Moduln bei mehreren direkten Summanden vor, so zeichnet sich unter diesen stets ein solcher aus, dessen Dimension von einer niedrigeren  $p$ -Potenz geteilt wird, als alle anderen. Dies ist dann der Gewichts-Green-Korrespondent.

Bei komplizierten Sockelstrukturen würde man rekursiv die einzelnen Konstituenten einem direkten Summanden zuordnen, indem man aufgrund von paarweisem Vergleichen und der Dimensionsbedingung aus Lemma 3.3.14 schrittweise vorgeht. Die Vermutung, Isomorphietypen von einfachen  $kG$ -Moduln auf diese Weise eineindeutig Gewichtsmoduln zuordnen zu können, hat sich allerdings als falsch erwiesen. In M. Szökes Dissertation [Szö98] wurde zum Beispiel der Fall  $G = J_2$ ,  $H \in \text{Syl}_5(G)$  und  $p = 5$  analysiert, bei dem sowohl der Gewichts-Green-Korrespondent der Dimension 826 als auch der mit der Dimension 442 einfache und isomorphe Sockel der Dimension 189 haben. Eine Zuordnung ist hier nicht möglich. Auch  $J_2$ ,  $p = 2$ ,  $HS$ ,  $p = 5$ ,  $M_{23}$ ,  $p = 2$  und  $J_3$ ,  $p = 3$  sind Gegenbeispiele aus M. Szökes Dissertation. Trotzdem bleibt aufgrund der hohen Zahl an bestätigten Beispielen (siehe auch Abschnitt 5.6) die Frage offen, ob bei gewissen Gruppen eine Eigenschaft vorliegt, so dass die Vermutung wenigstens für eine bestimmte Klasse von Gruppen stimmt.

**Gewicht im Zusammenhang mit der Zerlegungsmatrix von  $G$ :** Es sei  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares Zerfällungssystem für  $G$ . Inspiriert durch die Beobachtung am Ende von Abschnitt 2.9 auf Seite 50, bei dem die Zerlegungsmatrix von  $kG$  mit der von  $\mathfrak{E} := \text{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}_p^G)$  verglichen wird, haben wir auch die entsprechenden Matrizen im (echt) modularen Fall verglichen.

Die folgenden Matrizen deuten die Zerlegungsmatrizen von  $G$  und  $\mathfrak{E}$  an.

$G$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\cdots$	$\varphi_l$
$\chi_1$				
$\chi_2$				
$\vdots$				
$\chi_r$				
$\chi_{r+1}$				
$\vdots$				
$\chi_l$				

$\mathfrak{E}$	$W_1$	$W_2$	$\cdots$	$W_m$	
$\chi_1$					$\mu_1$
$\chi_2$					$\mu_2$
$\vdots$					$\vdots$
$\chi_r$					$\mu_r$
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\cdots$	$\alpha_m$	

Die Nummerierung sei so gewählt, dass die Charaktere  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$  genau die Konstituenten des Permutationscharakters  $K_P^G$  bilden. Den zu  $\chi_i$  korrespondierenden Charakter von  $\mathfrak{E}^K$  bezeichnen wir mit  $\mu_i$  für  $1 \leq i \leq r$  (vergleiche Satz 2.1.6). Zudem seien  $\varphi_i$  für  $1 \leq i \leq l$  die einfachen  $kG$ -Charaktere und  $\alpha_j$  für  $1 \leq j \leq m$  die einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Charaktere und  $W_j$  für  $1 \leq j \leq m$  die Isomorphietypen der unzerlegbaren direkten Summanden von  $\mathcal{O}_P^G$ .

Für  $1 \leq i \leq r$  haben wir die  $i$ -te Zeile der Zerlegungsmatrix von  $G$  mit der  $i$ -ten Zeile der Zerlegungsmatrix von  $\mathfrak{E}$  verglichen. Beachte, dass dies auch die Zerlegungsmatrix des Permutationsgitters  $\mathcal{O}_P^G$  ist (siehe auch Abschnitt 1.4). Dabei zeigte sich vor allem in kleinen Beispielen, dass für  $1 \leq i \leq r$  die Differenz der Anzahl der modularen Konstituenten von  $\chi_i$  und die der modularen Konstituenten von  $\mu_i$  vermeintlich etwas mit den Gewichts-Green-Korrespondenten zu tun hat.

Schauen wir uns das Beispiel  $G = A_7$ ,  $H \in \text{Syl}_5(G)$ ,  $p = 5$  an. Die Zerlegungsmatrix des Hauptblocks von  $G$  und des Endomorphismenrings  $\mathfrak{E}$  (ohne die projektiv einfachen) sehen wie folgt aus:

$G$	1	6	8	13	$\mathfrak{E}$	1	6	20	$21_1$	$21_2$	$35_2$	$35_3$	
1	1				1	1							1
6		1			6		1	1					$2_1$
$14_1$		1	1		$14_1$			1			1		$2_5$
$14_2$	1			1	$14_2$							1	$2_4$
21			1	1	21				1	1	1	1	5
						$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$2_3$	

Hier hat der Konstituent der Dimension 21 in der Zerlegungsmatrix von  $G$  die modularen Konstituenten 8 und 13. In der Zerlegungsmatrix des Gitters, sehen wir, dass sein Fitting-Korrespondent vier Konstituenten hat. Dann scheint wegen  $4 - 2 = 2$  der gewöhnliche Konstituent 21 von  $K_P^G$  zu zwei Gewichts-Green-Korrespondenten assoziiert zu sein. Tatsächlich haben die unzerlegbaren direkten Summanden  $21_1$  und  $21_2$  von  $k_P^G$  beide den einfachen  $kG$ -Modul der Dimension 21 als Konstituenten und stellen eine Art Ausgleich für den beschriebenen Konstituentendefekt dar. Ähnlich hat der gewöhnliche Konstituent der Dimension 6 in der Zerlegungsmatrix von  $G$  einen modularen Konstituenten, in der Zerlegungsmatrix des Gitters aber zwei. Es liegt ein „Defekt“ von einem Konstituenten vor, der durch den Gewichts-Green-Korrespondenten 6 ausgeglichen wird.

Hat ein Charakter in  $G$  mehr Konstituenten als in der Zerlegungsmatrix des Gitters, so findet kein Ausgleich statt.

Leider ließ sich aus diesen Beobachtungen keine allgemeingültige Vermutung formulieren. So scheint der triviale Charakter eine Ausnahme zu sein, bei dem bei einem Konstituentendefekt kein Ausgleich stattfindet. Man könnte als Begründung anführen, dass der korrespondierende Charakter in  $\mathfrak{E}$  projektiv einfach ist und eine Sonderstellung einnimmt. Bei  $A_6$ ,  $p = 5$  wurden die Charaktere  $8_1$  und  $8_2$  nach

dieser Vermutung durch einen gemeinsamen Gewichts-Green-Korrespondenten, nämlich 16, ausgeglichen. Wir mussten diesem also die Vielfachheit 2 im Ausgleichprozess zuordnen. In  $M_{11}$ ,  $p = 2$  gibt es ein ähnliches Problem, wobei hier nicht einmal klar ist, welcher direkte Summand von  $k_p^G$  Vielfachheit 2 hat. Übrigens haben wir angenommen, dass die Gewichts-Green-Korrespondenten statt der Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten den Ausgleich liefern. Dies ist sinnvoll, wenn wir beispielsweise  $G = A_7$ ,  $p = 2$  betrachten. Der Charakter  $14_3$  hat in  $kG$  einen Konstituenten, in  $\mathfrak{E}^k$  aber drei. Der Ausgleich geschieht durch zwei Gewichts-Green-Korrespondenten. Dann bleibt aber die Frage, warum  $k_p^G$  in den Fällen, wo kein Ausgleich nötig ist, nur Gewichts-Green-Korrespondenten als direkte Summanden hat.

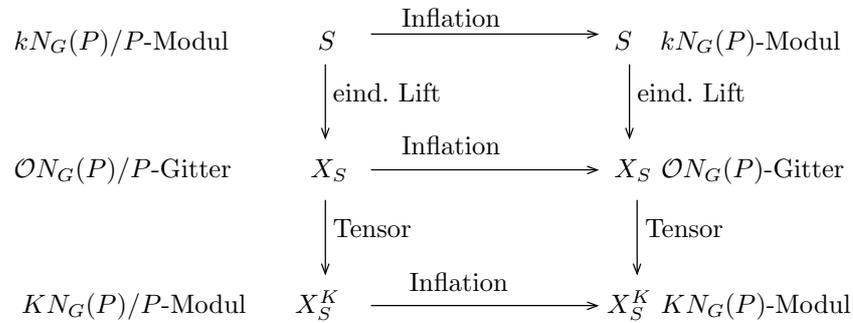
Dieses Ausgleichprinzip mutet zu künstlich an und stößt schnell an seine Grenzen. Wann und warum einzelne Gewichts-Green-Korrespondenten mit Vielfachheit belegt werden, wird nicht deutlich. Zudem steht das nicht im Einklang zu Alperins Gewichtsvermutung, wo jeder Isomorphietyp von Gewichts-Green-Korrespondenten offenbar nur einmal gezählt wird. Dennoch stellt sich die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen den Zerlegungsmatrizen gibt, der durch Alperins Vermutung begründet wird.

**Spezieller Fall  $P = C_p \times C_p$ :** In diesem Abschnitt werden wir einige Ergebnisse aus der Theorie der zyklischen Blöcke benutzen. Damit der Rahmen der Arbeit nicht gesprengt wird, verweisen wir für genauere Erklärungen auf [HL89]. Ausgangspunkt dieser Vermutung ist die symmetrische Gruppe  $G := S_p$  mit ihrer ganz speziellen modularen Darstellungstheorie, die wir kurz zusammenfassen wollen. Wir betrachten den Hauptblock dieser Gruppe mit Defektgruppe  $C_p$  und können die wohlverstandene Darstellungstheorie der zyklischen Blöcke anwenden. Der Normalisator  $N_G(C_p)$  ist vom Isomorphietyp  $C_p \rtimes C_{p-1}$  und somit eine Frobenius-Gruppe. Wir bezeichnen einen Erzeuger von  $C_p$  mit  $x_p$  und von  $C_{p-1}$  mit  $t$ . Beachte, dass  $p \nmid |N_G(C_p)/C_p|$  gilt, weswegen die Darstellungstheorien von  $N_G(C_p)/C_p$  über Charakteristik 0 und  $p$  gleich sind. Die generische Charaktertafel von  $N_G(C_p) = C_p \rtimes C_{p-1} = \langle x_p \rangle \rtimes \langle t \rangle$  ist von folgender Gestalt:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & t^j & x_p \\ \hline \zeta^i & 1 & \zeta(t^j)^i & 1 \\ \xi & p-1 & \cdot & -1, \end{array}$$

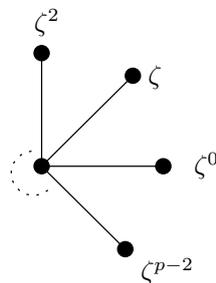
wobei  $\zeta^i$  für  $1 \leq i \leq p-1$  die  $i$ -te Potenz eines ausgezeichneten (linearen) Charakters  $\zeta$  von  $C_{p-1}$  bezeichnet. Zudem gilt  $\zeta^i(x \cdot t) = \zeta^i(t)$  für alle  $x \in C_p$ . Die zu  $\zeta^i$  gehörigen Moduln können wir via Inflation als  $N_G(C_p)$ -Moduln auffassen, in deren Kern jeweils  $C_p$  liegt. Wegen  $p \nmid |N_G(C_p)/C_p|$  hat jeder zu  $\zeta^i$  gehörige Modul für  $1 \leq i \leq p-1$  einen Vertex  $C_p$  und eine triviale Quelle. Bezeichnen wir einen einfachen  $kN_G(P)/P$ -Modul mit  $S$  und einen Lift davon mit  $X_S$ , so kommutiert das Diagramm in Abbildung 5.5.

Abbildung 5.5: Der Fall  $P = C_p$



Die Theorie sagt nun, dass die Moduln mit trivialer Quelle eindeutig liftbar zu Gittern mit trivialer Quelle sind (vgl. [Lan83, Thm. II 12.4] und [HL89]). Der Brauer-Baum von  $N_G(C_p)$  hat die Stern-Form wie sie in Abbildung 5.6 angedeutet ist.

Abbildung 5.6: Der Brauer-Baum von  $N_G(C_p)$



Mit diesem strukturellen Wissen induzieren wir von  $N_G(C_p)$  nach  $G$ . Dabei bleibt die Eigenschaft eines Moduls, eine triviale Quelle zu haben, erhalten.

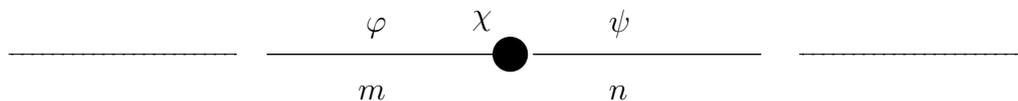
Um andeuten zu können, was bei der Induktion von  $N_G(C_p)$  nach  $G$  geschieht, betrachten wir zuerst den Brauer-Baum von  $S_p$ . Dieser ist ein reeller Stamm, dessen Kanten mit einer speziellen Nummerierung etikettiert werden (vgl. [HL89]):

Wir betrachten einen gewöhnlichen Charakter  $\chi$  von  $G$ , dessen Knoten im Brauer-Baum an einer ungeraden Position steht und nicht zu einem Endpunkt des Brauer-Baums korrespondiert, wie in Abbildung 5.7 angedeutet.

Dann reduziert  $\chi$  in Charakteristik  $p$  zu zwei nicht-isomorphen, uniserialen Moduln mit trivialer Quelle mit folgender Struktur:

$$\begin{array}{cc}
 \varphi & \psi \\
 \psi & \varphi.
 \end{array}$$

Abbildung 5.7: Ausschnitt Brauer-Baum



Der entscheidende Punkt ist, dass der eine der Green-Korrespondent zu  $\zeta^n$ , der andere zu  $\zeta^m$  (die zu  $N_G(C_p)$  gehören) ist, wenn  $n$  und  $m$  die Nummern der angrenzenden Kanten sind. Insbesondere können wir den Gewichtsmodul zu  $\zeta^n$  ohne Einschränkung  $\varphi$  zuordnen und  $\zeta^m$  zu  $\psi$ . Alperins Vermutung wird also durch eine ganz konkrete Bijektion bewiesen.

Die Hoffnung bestand nun, im speziellen Fall von Sylowgruppen der Form  $C_p \times C_p$ , diese Theorie übertragen zu können. Wir haben daher mehrere Gruppen mit dieser Eigenschaft daraufhin untersucht. Können wir eine ähnliche Struktur der reduzierten gewöhnlichen Charaktere bei einer Gruppe, die  $S_p \times S_p$  enthält wiederfinden? Schauen wir auf  $S_{2p}$ .

$G = S_6$ ,  $p = 3$ : Der Normalisator der  $p$ -Sylowgruppe ist die maximale Untergruppe der Form  $(C_3 \times C_3) : D_8$ . In  $D_8$  finden wir 4 lineare Charaktere und einen vom Grad 2, die alle  $C_3 \times C_3$  im Kern haben. Induziert man diese nach  $G$  (die Dimensionen sind klein genug, so dass direkte Rechnungen noch möglich sind), so ergibt sich mit der abkürzenden Schreibweise  $N := N_G(C_3 \times C_3)$ :

$$(1_1)_N^G = \mathbf{1}_1 \oplus 9_1,$$

$$(1_2)_N^G = \mathbf{1}_2 \oplus 9_2,$$

$$(1_3)_N^G = \mathbf{10}_1 = \begin{array}{c} 4_1 \\ 1_1 \oplus 1_2 \\ 4_1 \end{array},$$

$$(1_4)_N^G = \mathbf{10}_2 = \begin{array}{c} 4_2 \\ 1_1 \oplus 1_2 \\ 4_2 \end{array},$$

$$2_N^G = \mathbf{20} = \begin{array}{c} 6 \\ 4_1 \oplus 4_2 \\ 6 \end{array}.$$

Die induzierten Moduln haben eine sehr symmetrische Struktur und laden geradezu ein, den Gewichtsmodul  $1_3$  auf  $4_1$  bzw.  $1_4$  auf  $4_2$  oder  $2$  auf  $6$  abzubilden.

Die betrachteten Dimensionen sind noch sehr klein, so dass andere überlappende Strukturen zu vorschnellen Schlüssen führen könnten. Schauen wir deshalb auf das nächst größere Beispiel:

$G = S_{10}$ ,  $p = 5$ : Der Normalisator der  $p$ -Sylowgruppe  $P$  liegt in der maximalen Untergruppe der Form  $H := S_5 \wr C_2 \cong (A_5 \times A_5) : D_8$ . Weiterhin gilt für den Faktor  $\overline{N} := N_G(C_5 \times C_5)/(C_5 \times C_5) \cong C_4 \wr C_2$ . Wir induzieren alle inflatierten einfachen  $k\overline{N}$ -Moduln nach  $H$ , bestimmen mit Hilfe des Lemmas 3.3.14 die Gewichts-Green-Korrespondenten in  $H$  und induzieren diese nach  $G$ . Durch diesen Zwischenschritt können wir eine große Induktion in zwei kleinere aufteilen. In  $N_G(C_5 \times C_5)$  gibt es acht 1-dimensionale Moduln und sechs Moduln der Dimension 2 mit  $C_5 \times C_5$  im Kern.

Beachte, dass wir uns die Freiheit genommen und auf die Indizierung und Untersuchung von nicht bedeutsamen Komponenten verzichtet haben. Dies machen wir durch einen Index  $*$  kenntlich. Innerhalb einer Radikalreihen-Ebene fassen wir isomorphe Moduln zusammen, was bedeutet, dass Terme wie  $56_*^2 \oplus 56_*$  auf zwei nicht-isomorphe Moduln der Dimension 56 hindeuten. Zur übersichtlicheren Darstellung haben wir außerdem die Abkürzung  $N := N_G(C_5 \times C_5)$  gewählt und Gewichts-Green-Korrespondenten durch Fettschrift hervorgehoben.

$$\begin{array}{ll}
 (1_1)_N^H = \mathbf{36_1} = \begin{array}{c} 9_1 \\ 18 \\ 9_2 \end{array}, & (1_5)_N^H = \mathbf{1_1} \oplus 10_* \oplus 25_*, \\
 (1_2)_N^H = \mathbf{36_2} = \begin{array}{c} 9_3 \\ 18 \\ 9_4 \end{array}, & (1_6)_N^H = \mathbf{1_2} \oplus 10_* \oplus 25_*, \\
 (1_3)_N^H = \mathbf{36_3} = \begin{array}{c} 9_2 \\ 18 \\ 9_1 \end{array}, & (1_7)_N^H = \mathbf{1_3} \oplus 10_* \oplus 25_*, \\
 (1_4)_N^H = \mathbf{36_4} = \begin{array}{c} 9_4 \\ 18 \\ 9_3 \end{array}, & (1_8)_N^H = \mathbf{1_4} \oplus 10_* \oplus 25_*.
 \end{array}$$

Die Induktionen der 2-dimensionalen Moduln ergeben:

$$(2_1)_N^H = \mathbf{72} = \begin{array}{c} 18 \\ 9_1 \oplus 9_2 \oplus 9_2 \oplus 9_4 \\ 18 \end{array}, \quad (2_4)_N^H = \mathbf{12_3} \oplus 60_* = \begin{array}{c} 6_2 \\ 6_1 \end{array} \oplus 60_*,$$

$$(2_2)_N^H = \mathbf{12_1} \oplus 60_* = \begin{array}{c} 6_1 \\ 6_2 \end{array} \oplus 60_*, \quad (2_5)_N^H = \mathbf{12_4} \oplus 60_* = \begin{array}{c} 6_4 \\ 6_3 \end{array} \oplus 60_*,$$

$$(2_3)_N^H = \mathbf{12_2} \oplus 60_* = \begin{array}{c} 6_3 \\ 6_4 \end{array} \oplus 60_*, \quad (2_6)_N^H = \mathbf{2} \oplus 10_1 \oplus 10_2 \oplus 50.$$

Die Gewichts-Green-Korrespondenten aus der obigen Zusammenstellung wurden separiert und dann nach  $G$  induziert.

Zur übersichtlicheren Darstellung haben wir nach dem zweiten Gleichheitszeichen nur die Radikalreihe (von oben beginnend) explizit ausgeschrieben und die übrigen unzerlegbaren direkten Summanden mit der Bezeichnung  $Y$  abgekürzt.

$$\mathbf{36_1}_H^G = \mathbf{2161_1} \oplus Y = \left[ \begin{array}{c} 34_1 \oplus 70_1 \oplus 266 \\ 56_*^2 \oplus 56_* \oplus 217_*^2 \oplus 217_* \\ 1 \oplus 28_* \oplus 34_1 \oplus 34_2 \oplus 70_* \oplus 266^2 \\ 56_1 \oplus 217_1 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$\mathbf{36_2}_H^G = \mathbf{2161_2} \oplus Y = \left[ \begin{array}{c} 56_1 \oplus 217_1 \\ 1 \oplus 28_* \oplus 34_1 \oplus 34_2 \oplus 70_* \oplus 266^2 \\ 56_*^2 \oplus 56_* \oplus 217_*^2 \oplus 217_* \\ 34_1 \oplus 70_* \oplus 266 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$\mathbf{36_3}_H^G = \mathbf{2161_3} \oplus Y = \left[ \begin{array}{c} 56_2 \oplus 217_2 \\ 1 \oplus 28_* \oplus 34_1 \oplus 34_2 \oplus 70_* \oplus 266^2 \\ 56_*^2 \oplus 56_* \oplus 217_*^2 \oplus 217_* \\ 34_2 \oplus 70_* \oplus 266 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$\mathbf{36_4}_H^G = \mathbf{2161_4} \oplus Y = \left[ \begin{array}{c} 34_2 \oplus 70_2 \oplus 266 \\ 56_*^2 \oplus 56_* \oplus 217_*^2 \oplus 217_* \\ 1 \oplus 28_* \oplus 34_1 \oplus 34_2 \oplus 70_* \oplus 266^2 \\ 56_2 \oplus 217_2 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$\mathbf{1}_{1H}^G = \mathbf{1}_1 \oplus Y,$$

$$\mathbf{1}_{2H}^G = \mathbf{51}_1 \oplus Y = \begin{bmatrix} 8_1 \\ 1_1 \oplus 34_1 \\ 8_1 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{1}_{3H}^G = \mathbf{51}_2 \oplus Y = \begin{bmatrix} 8_2 \\ 1_2 \oplus 34_2 \\ 8_2 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{1}_{4H}^G = \mathbf{1}_2 \oplus Y,$$

$$\mathbf{72}_H^G = \mathbf{1272} \oplus Y = \begin{bmatrix} 217_1 \oplus 217_2 \\ 1_1 \oplus 1_2 \oplus 34_1^2 \oplus 34_2^2 \oplus 266 \\ 217_1 \oplus 217_2 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{12}_{1H}^G = \mathbf{687}_1 \oplus Y = \begin{bmatrix} 28_1 \\ 8_1 \oplus 56_1 \oplus 217_1 \\ 28_*^2 \oplus 266 \\ 56_1 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{12}_{2H}^G = \mathbf{687}_2 \oplus Y = \begin{bmatrix} 56_1 \oplus 28_1 \\ 8_* \oplus 28_1 \oplus 266 \oplus 56_* \oplus 217_* \\ 28_1 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{12}_{3H}^G = \mathbf{687}_3 \oplus Y = \begin{bmatrix} 56_2 \oplus 28_2 \\ 8_* \oplus 28_1 \oplus 266 \oplus 56_* \oplus 217_* \\ 28_2 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{12}_{4H}^G = \mathbf{687}_4 \oplus Y = \begin{bmatrix} 28_2 \\ 8_2 \oplus 56_2 \oplus 217_2 \\ 28_*^2 \oplus 266 \\ 56_2 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$\mathbf{2}_H^G = \mathbf{252} = \begin{matrix} 70 \\ 56_1 \oplus 56_2 \\ 70 \end{matrix}.$$

Wenn auch einige Gewichts-Green-Korrespondenten dazu einladen, eine Bijektion zwischen Gewichtsmoduln und einfachen  $kG$ -Modul zu erkennen, so ist die

Sockel- oder Kopfstruktur bei anderen zu kompliziert, um eine Analogie zum Fall  $S_p$  anzunehmen. Welche direkte Bijektion bei diesem Ansatz kann man noch erwarten, wenn man beispielsweise den  $kG$ -Modul 1272 in der Induktion  $72_H^G$  betrachtet?

Trotzdem haben wir einen weiteren Schritt unternommen, um vielleicht doch noch strukturelle Muster zu erkennen. Wir haben nämlich den einfachen Kopf jedes Gewichts-Green-Korrespondenten in  $H(!)$  nach  $G$  induziert. Das ergibt folgende Zerlegungen (mit den obigen Konventionen).

$$(9_1)_H^G = 34_1 \oplus 300_1,$$

$$(9_2)_H^G = \left[ \begin{array}{c} 56_1 \oplus 217_1 \\ 1_1 \oplus 28_1 \oplus 34_1 \oplus 34_2 \oplus 266_1 \\ 56_1 \oplus 217_1 \end{array} \right] \oplus 225_1,$$

$$(9_3)_H^G = \left[ \begin{array}{c} 56_2 \oplus 217_2 \\ 1_2 \oplus 28_2 \oplus 34_1 \oplus 34_2 \oplus 266_2 \\ 56_2 \oplus 217_2 \end{array} \right] \oplus 225_2,$$

$$(9_4)_H^G = 34_2 \oplus 300_2,$$

$$(1_1)_H^G = 1_1 \oplus Y,$$

$$(1_2)_H^G = \left[ \begin{array}{c} 8_1 \\ 1_1 \oplus 34_1 \\ 8_1 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$(1_3)_H^G = \left[ \begin{array}{c} 8_2 \\ 1_2 \oplus 34_2 \\ 8_2 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$(1_4)_H^G = 1_2 \oplus Y,$$

$$(18_1)_H^G = \left[ \begin{array}{c} 70 \oplus 266 \\ 56_1 \oplus 56_2 \oplus 217_1 \oplus 217_2 \\ 70 \oplus 266 \end{array} \right] \oplus Y,$$

$$(6_1)_H^G = \begin{bmatrix} 28_1 \\ 8_1 \oplus 217_1 \\ 28_1 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$(6_2)_H^G = \begin{bmatrix} 56_1 \\ 28_1 \oplus 266_1 \oplus 56_1 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$(6_3)_H^G = \begin{bmatrix} 56_2 \\ 28_2 \oplus 266_2 \oplus 56_2 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$(6_4)_H^G = \begin{bmatrix} 28_2 \\ 8_2 \oplus 217_2 \\ 28_2 \end{bmatrix} \oplus Y,$$

$$(2)_H^G = \begin{array}{c} 70 \\ 56_1 \oplus 56_2 \\ 70 \end{array}.$$

Tatsächlich scheinen die induzierten Moduln eine klare Struktur zu besitzen mit einer offenkundigen Bijektionsmöglichkeit zwischen den Gewichtsmoduln und den einfachen  $kG$ -Moduln.

Es wäre lohnenswert für spätere Projekte, diesen Ansatz weiter zu verfolgen, indem zunächst  $S_{14}$  als ein noch größeres Beispiel gerechnet wird. Und so schließen wir diesen Abschnitt mit der optimistischen Formulierung, dass dieser Ansatz sowohl den Sackgassen als auch den offenen Vermutungen zugerechnet werden darf.

## 5.3 Eine Vermutung

Die vielen untersuchten Beispiele stellen einen genügend großen Fundus bereit, die Strukturen auf Analogien, Parallelen oder Divergenzen bei (Nicht-)Gewichts-Green-Korrespondenten zu untersuchen. Neben vielen Fehlinterpretationen (siehe Abschnitt 5.2) stellte sich dann eine Vermutung vor, die bisher noch nicht widerlegt werden konnte.<sup>1</sup>

### 5.3.1 Vermutung

Es seien  $G$  eine Gruppe,  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$  und  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Wir bezeichnen den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_P^G)$  mit  $\mathfrak{E}^k$ . Weiter sei

$$\mathcal{S} := \{S \leq \text{soc}(\mathfrak{E}_{\mathfrak{e}^k}^k) : S \text{ einfach}\} / \text{Isomorphie}.$$

Dann gelten:

- (a)  $|\mathcal{S}| = |\{(S, Q) : (S, Q) \text{ Gewicht von } G\} / \text{Äquivalenz}|$ .
- (b)  $|\mathcal{S}| = |\{M : M \text{ einfacher } kG\text{-Modul}\} / \text{Isomorphie}|$ .

Als erläuterndes Beispiel wählen wir  $G = A_9$  in Charakteristik 2. Wir sehen in der Datensammlung in 5.6.9, dass  $k_P^G$  in zwölf unzerlegbare direkte Summanden zerfällt. In der folgenden Tabelle sind neben den Sockelkonstituenten auch die höchste 2-Potenz, die die Dimension des jeweiligen direkten Summanden teilt, aufgeführt. In der 4. Zeile haben wir die Dimensionen der in  $\mathfrak{E}^k$  korrespondierenden PIMs aufgenommen und schließlich deren Sockelkonstituenten. Die Dimensionen der Gewichts-Green-Korrespondenten sind fett gedruckt. Wenn es die Lesbarkeit zuließ, haben wir auf das  $\oplus$ -Zeichen aus Platzgründen verzichtet.

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
dim	<b>1</b>	<b>126<sub>1</sub></b>	<b>126<sub>2</sub></b>	<b>8</b>	<b>48</b>	<b>432</b>	384	<b>258</b>	<b>252</b>	<b>120<sub>1</sub></b>	<b>120<sub>2</sub></b>	576
$2^x$	1	2	2	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^7$	2	$2^2$	$2^3$	$2^3$	$2^6$
soc	1	$8_1$	$8_2$	8	48	$48 \oplus 160$	160	26	$26 \oplus 78$	$20_1$	$20_2$	78
PIM	$1_1$	$6_1$	$6_2$	$1_2$	2	8	$6_3$	11	$9_1$	$4_1$	$4_2$	$9_2$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_5 2$	2	$1_6 1_7$	$1_6 1_7$	$1_7 1_8$	$1_7 1_9$	$1_7$

Hier gibt es zehn Gewichts-Green-Korrespondenten. Andererseits hat  $\mathcal{S}$  die zehn Elemente  $1_1, 1_2, \dots, 1_9$  und 2. Dagegen hat  $\mathfrak{E}^k$  zwölf einfache Moduln.

Beachte, dass die Vermutung für Gruppen mit zerfallendem  $BN$ -Paar durch die Arbeiten von J.A. Green [Gre78] und von M. Cabanes [Cab84] bestätigt wird. Wir haben in Kapitel 3 gesehen, dass für diese Gruppen der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$

<sup>1</sup>25.09.2008: Die Gruppe  $M_{11}$  in Charakteristik 3 bildet ein Gegenbeispiel dieser Vermutung. Vergleiche auch Seite 213. Daher muss die Vermutung für eine Klasse von Gruppen formuliert werden, zu der  $M_{11}$  in Charakteristik 3 nicht gehört.

quasi-Frobenius ist und daher die Sockelkonstituenten von  $\mathfrak{E}^k$  in Bijektion zu den einfachen  $kG$ -Moduln stehen. Andererseits hat M. Cabanes Alperins Vermutung für diese Gruppen bewiesen. Daher folgt Vermutung 5.3.1 in diesem Fall.

Die obige Vermutung können wir noch erweitern. Wie in Abschnitt 2.9 seien die unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  wie folgt nummeriert:

$$k_P^G = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{n_i} W_{ij},$$

wobei  $W_{ij} \cong W_{lm}$  genau dann gilt, wenn  $i = l$  ist. Die dazu korrespondierenden PIMs in  $\mathfrak{E}^k$  bezeichnen wir mit  $P_{ij}$ .

### 5.3.2 Definition und Bemerkung

Die Bezeichnungen seien wie oben.

- (a) Wir definieren auf der Menge  $\mathcal{P}$  der Isomorphieklassen der PIMs von  $\mathfrak{E}^k$  eine Relation  $\sim$  wie folgt: Es sei genau dann  $P_{i,1} \sim P_{j,1}$ , wenn  $P_{i,1}$  und  $P_{j,1}$  einen einfachen Sockelkonstituenten gemeinsam haben. Dann ist der transitive Abschluss  $\simeq$  von  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Isomorphieklassen der PIMs von  $\mathfrak{E}^k$ , deren Äquivalenzklassen wir mit  $\mathcal{P}_l$  für  $1 \leq l \leq s$  bezeichnen.
- (b) Die Äquivalenzrelation  $\simeq$  induziert via der Fitting-Korrespondenz auch eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\mathcal{W}$  der Isomorphietypen der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ . Die Äquivalenzklassen davon bezeichnen wir mit  $\mathcal{W}_l$  für  $1 \leq l \leq s$ . Offensichtlich gilt  $|\mathcal{W}_l| = |\mathcal{P}_l|$  für alle  $1 \leq l \leq s$ .
- (c) Die Äquivalenzrelation  $\simeq$  induziert auf der Menge  $\mathcal{S}$  folgende Äquivalenzrelation, die wir mit  $\approx$  bezeichnen: Es ist genau dann  $S \approx S'$ , wenn es eine Äquivalenzklasse  $\mathcal{P}_l$  für  $1 \leq l \leq s$  gibt, so dass  $S$  ein Sockelkonstituent von  $P_{i,1} \in \mathcal{P}_l$  und  $S'$  ein Sockelkonstituent von  $P_{j,1} \in \mathcal{P}_l$  ist. Die Äquivalenzklassen von  $\approx$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}_l$  für  $1 \leq l \leq s$ .

Um eine übersichtliche Schreibweise zu wahren, schreiben wir statt  $P_{i,1}$  nur noch  $P_i$ . In unserem Beispiel ergeben sich folgende Klassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{P_1\} \\ \mathcal{P}_2 &= \{P_2\} \\ \mathcal{P}_3 &= \{P_3\} \\ \mathcal{P}_4 &= \{P_4\} \\ \mathcal{P}_5 &= \{P_5, P_6, P_7\} \\ \mathcal{P}_6 &= \{P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}\} \end{aligned}$$

Die Sockel-Konstituenten des Endomorphismenrings gruppieren sich also wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{1_1\} \\ \mathcal{S}_2 &= \{1_2\} \\ \mathcal{S}_3 &= \{1_3\} \\ \mathcal{S}_4 &= \{1_4\} \\ \mathcal{S}_5 &= \{1_5, 2\} \\ \mathcal{S}_6 &= \{1_6, 1_7, 1_8, 1_9\}\end{aligned}$$

Wir können jetzt die angekündigte Erweiterung von Vermutung 5.3.1 formulieren. Sind nämlich nicht alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  Gewichts-Green-Korrespondenten, so scheint sich eine Charakterisierung der Gewichts- und Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten zu ergeben. Beachte, dass wir in der obigen Tabelle die direkten Summanden von  $k_P^G$  bereits nach Äquivalenzklassen geordnet haben. In einer solchen Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_i$ , haben wir in der Tabelle noch die direkten Summanden nach aufsteigenden  $p$ -Potenzen der Dimensionen geordnet. Mit dieser Konvention können wir die folgende Beobachtung formulieren.

### 5.3.3 Beobachtung

Die Bezeichnungen und Konventionen seien wie oben. Die Äquivalenzrelation  $\simeq$  habe  $s$  Äquivalenzklassen, von denen wir eine, etwa  $\mathcal{P}_l$  fixieren. Die entsprechenden Äquivalenzklassen auf  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{S}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{W}_l$  und  $\mathcal{S}_l$ . Im „Standardfall“ (Erläuterung weiter unten) können wir die Vermutung 5.3.1 wie folgt erweitern:

In  $\mathcal{W}_l$  gibt es genau  $|\mathcal{S}_l|$  Gewichts-Green-Korrespondenten. Diese können wir zudem genau bestimmen, wenn unter den direkten Summanden in  $\mathcal{W}_l$  genau  $|\mathcal{S}_l|$  vorkommen, deren  $p$ -Anteil in ihrer Dimension echt kleiner ist als bei den übrigen. Diese sind nämlich genau die Gewichts-Green-Korrespondenten. Mit unserem Ordnungsprinzip sind das die ersten  $|\mathcal{S}_l|$  Summanden.

Das obige Beispiel liest sich gemäß dieser Bemerkung wie folgt: Die ersten vier Äquivalenzklassen  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$  und  $\mathcal{W}_4$  sind einelementig, genau wie die zugehörigen Äquivalenzklassen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  und  $\mathcal{S}_4$ . Entsprechend der Beobachtung sind auch alle zugehörigen direkten Summanden Gewichts-Green-Korrespondenten. Bei  $\mathcal{S}_5$  und  $\mathcal{S}_6$  stellen wir  $|\mathcal{P}_5| - |\mathcal{S}_5| = 1$  bzw.  $|\mathcal{P}_6| - |\mathcal{S}_6| = 1$  fest. Tatsächlich finden wir in  $\mathcal{W}_5$  den unzerlegbaren direkten Summanden 384 (mit  $2^7 \mid 384$ ), der kein Gewichts-Green-Korrespondent ist. Auch in  $\mathcal{W}_6$  ist der unzerlegbare direkte Summand 576 der Nicht-Gewichts-Green-Korrespondent. Alle anderen Moduln sind Gewichts-Green-Korrespondenten. Beachte auch hier, dass  $2^6 \mid 576$  die höchste 2-Potenz ist, die eine Dimension eines in dieser Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_6$  vorkommenden unzerlegbaren direkten Summanden ist.

Es gibt nur ein Beispiel unter allen Berechnungen am Ende dieser Arbeit, nämlich  $G = S_7$ ,  $p = 2$ , Seite 180, bei dem in einer Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_l$  nicht  $|\mathcal{S}_l|$  direkte Summanden mit echt kleinerem  $p$ -Anteil in der Dimension vorkommen. In diesem Fall sind die Voraussetzungen aus der obigen Beobachtung nicht erfüllt und wir können nicht anhand der Dimensionen feststellen, welche Moduln der betreffenden Äquivalenzklasse Gewichts-Green-Korrespondenten sind.

Unter allen Beispielen, die am Ende dieser Arbeit abgedruckt sind, gibt es eins ( $G = L_3(4)$  in Charakteristik 3, siehe Seite 265), das kein „Standardfall“ ist. Hier muss die Beobachtung um einen Äquivalenzklassen-Automorphismus erweitert werden. In diesem Fall lassen sich die Gewichts-Green-Korrespondenten nicht mehr an der Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_l$  wie in der obigen Bemerkung ablesen, sondern an einer gleichmächtigen anderen Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_{l'}$  für ein  $1 \leq l' \leq t$ . Umgekehrt lassen sich die Green-Korrespondenten innerhalb der Äquivalenzklasse  $\mathcal{W}_{l'}$  an  $\mathcal{W}_l$  bestimmen. Dabei sind beide Klassen gleich mächtig. Der Automorphismus scheint dabei gewisse Strukturen oder Symmetrien erhalten zu müssen. Wegen der mangelnden Zahl von Beispielen können wir dazu nicht mehr Informationen bieten.

Ist die obige Beobachtung allgemein gültig, so stehen die Sockelkonstituenten des Endomorphismenrings in enger Verbindung zu den einfachen  $kG$ -Moduln. Sie allein bestimmen dann die Anzahl der Gewichts-Green-Korrespondenten und – mit Alperins Gewichtsvermutung – die Anzahl der einfachen  $kG$ -Moduln. Neben dem Beweis dieser Vermutung stellt sich die Frage, ob es damit eine Möglichkeit gibt, eine konkrete Bijektion zwischen Gewichten und den einfachen  $kG$ -Moduln zu finden. Man könnte einen Funktor von der Kategorie der  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln in die Kategorie der  $kG$ -Moduln oder umgekehrt von der Kategorie der  $kG$ -Moduln in die der  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln erwägen, der die Sockelkonstituenten auf eindeutige Weise den einfachen  $kG$ -Moduln zuordnet.

Beachte, dass bei Endomorphismenringen, die quasi-Frobenius sind, stets  $|\mathcal{P}_l| = |\mathcal{W}_l| = |\mathcal{S}_l| = 1$  für alle Äquivalenzklassen gilt. Dies steht im Einklang zu Alperins Gewichtsvermutung, die für diesen Fall äquivalent zu der Bedingung ist, dass alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  Gewichts-Green-Korrespondenten sind.

Vermutung 5.3.1 wurde an allen berechneten Beispielen (etwa 80) überprüft und bestätigt. Gelingt ein Beweis dieser Vermutung, so wäre es möglich, einen neuen Zugang zum Beweis von Alperins Vermutung zu schaffen. Man könnte versuchen, Alperins Vermutung über den Umweg der Endomorphismenringe in zwei Schritte zu unterteilen und somit die Schwierigkeit des Problems auf zwei (einfachere?) aufzuteilen. Zunächst müsste man die Gleichheit der Anzahl der Sockelkonstituenten von  $\mathfrak{E}^k$  und die Anzahl der einfachen  $kG$ -Moduln beweisen. Dann würde man in einem zweiten Schritt die direkte Zuordnung der Sockelkonstituenten zu den Gewichts-Green-Korrespondenten suchen.

Eine letzte Frage wollen wir diesem Abschnitt in diese Richtung weisend hinzufügen. Welche Bedeutung oder Eigenschaften haben die einfachen Moduln des

Endomorphismenrings, die *nicht* im Sockel vorkommen? Haben sie Eigenschaften, die einen Hinweis auf die Beweisrichtung geben?

## 5.4 Berechnung der Zerlegungsmatrizen

In diesem Abschnitt wird explizit erläutert, wie die Berechnungen der Beispiele ausgeführt wurden.

**Berechnung des Permutationsmoduls** Wir fixieren eine Gruppe  $G$ , eine Primzahl  $p$ , ein  $p$ -modulares Zerfallungssystem  $(K, \mathcal{O}, k)$  und die Untergruppen  $H = P \in \text{Syl}_p(G)$  oder  $H = N_G(P)$ . Am Beispiel von  $G = A_5$ ,  $H = P \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $p = 2$  wollen wir dies demonstrieren. Zuerst bestimmen wir die irreduziblen (gewöhnlichen) Konstituenten des Permutationscharakters  $1_H^G$  mit der jeweiligen Vielfachheit.

```
gap> g := AlternatingGroup(5);;
gap> h := SylowSubgroup(g,2);;
gap> MultiplicityOfConstituents(g,h);
1 - 1
1 - 4
2 - 5
```

In der linken Spalte steht die Vielfachheit des Konstituenten mit der Dimension, die in der entsprechenden Zeile der rechten Spalte steht.

Dann berechnen wir in GAP die gewöhnliche Charaktertafel des Endomorphismenrings des Permutationsmoduls. Wie in Lemma 2.3.1 beschrieben, reichen dazu die Charaktertafel der Gruppe und die Kenntnis der Klassen-Nebenklassentafeln. Wir haben daraus die Funktion „CharacterTableSchurianSchemeWithCorrespondingGCharacter“ geschrieben.

```
gap> CharacterTableSchurianSchemeWithCorrespondingGCharacter(g,h);
CC1-Sizes: [ 1, 15, 20, 12, 12 ]
[ [ [ 1, 1, 1, 4, 4, 4 ], [ 1, 1, 1, -1, -1, -1 ],
[ 2, -1, -1, 0, 0, 0 ] ], [ 1, 4, 5 ] ]
```

Mit „CharacterTableSchurianSchemeWithCorrespondingGCharacter()“ werden in „CC1“ die Größen der Konjugiertenklassen bestimmt, die allerdings nur zur Information gedruckt und nicht als Wert übergeben werden. Die eigentliche Ausgabe der Funktion ist die Charaktertafel in Matrixform zusammen mit einem letzten Listeneintrag, hier  $[1, 4, 5]$ . Beispielsweise korrespondiert der dritte Eintrag 5 zur dritten Zeile der Charaktertafel  $[2, -1, -1, 0, 0, 0]$  und deutet an, dass

der gewöhnliche Charakter vom Grad 5, der auch Konstituent des Permutationscharakters ist, zum gewöhnlichen Charakter von  $\text{End}_{KG}(K_P^G)$  vom Grad 2 korrespondiert. Beachte, dass der erste Eintrag der Charaktertafel immer  $\mu(\mathfrak{a}_1)$ , also die Dimension des Charakters ist. Solange die Darstellung noch überschaubar zu gestalten ist, werden diese Charaktertafeln in der Datensammlung aufgeführt. Anschließend berechnen wir mit GAP das Bild in  $S_{|G:H|}$  des Homomorphismus, der sich aus der Operation von  $G$  auf den Nebenklassen von  $H$  in  $G$  ergibt. Die Funktion „MeatAxeString(gens,  $q$ ,  $n$ )“ wandelt einen Erzeuger „gens“ dieser Permutationsgruppe in Matrizen über einem Körper mit gewünschter Größe  $q$  vom Format  $n \times n$  um und gibt sie in MeatAxe-lesbarer Form aus. Obwohl viele Aussagen auf der algebraischen Abgeschlossenheit des jeweiligen Körpers beruhen, reicht es aus, in den einzelnen Fällen die endlichen Körper groß genug zu wählen, so dass sie Zerfällungskörper des Systems sind.

```
gap> p := Action(g,RightCosets(g,h),OnRight);;
gap> gens := GeneratorsOfGroup(p);
[ (1,13,10,7,4)(2,14,11,8,5)(3,15,12,9,6),
  (1,7,6)(2,8,4)(3,9,5)(10,12,11)(13,14,15) ]
gap> mod_gen1 := MeatAxeString(gens[1],8,[15,15]);;
gap> mod_gen2 := MeatAxeString(gens[2],8,[15,15]);;
gap> FileString("tmp/modgen_1",mod_gen1);;
gap> FileString("tmp/modgen_2",mod_gen2);;
```

Die Erzeugung dieser MeatAxe-lesbaren Matrizen haben wir in der Funktion „MeatAxeStringRightCoset()“ zusammengefasst. Sie benötigt die Argumente  $G$ ,  $H$  und  $p$ .

**Zerlegung des Permutationsmoduls** Die von GAP übergebenen Matrizen müssen mit „zcv“ in binäres Format konvertiert werden. Dann kann die MeatAxe die Konstituenten des zugehörigen Moduls mittels „chop“ bestimmen. Die MeatAxe zerlegt den Modul von oben wie folgt:

```
~/tmp> zcv modgen_1 mod_gen.1
15x15 permutation matrix over GF(8)
~/tmp> zcv modgen_2 mod_gen.2
15x15 permutation matrix over GF(8)
~/tmp> chop mod_gen
*** CHOP MODULE ***

Chop: Dim=15
Split: Subspace=4, Quotient=11
Chop: Dim=4
Irreducible (4a)
```

```

Chop: Dim=11
Split: Subspace=5, Quotient=6
Chop: Dim=5
Split: Subspace=4, Quotient=1
Chop: Dim=4
Irreducible (4b)
Chop: Dim=1
Irreducible (1a)
Chop: Dim=6
Split: Subspace=1, Quotient=5
Chop: Dim=1
Irreducible (1a)
Chop: Dim=5
Split: Subspace=4, Quotient=1
Chop: Dim=1
Irreducible (1a)
Chop: Dim=4
Irreducible (4b)

```

Chopping completed: 3 different composition factors  
Writing mod\_gen.cfinfo

Name	Mult	SF	Fingerprint
1a	3	1	0,1,0,1,0,1
4a	1	1	1,0,1,1,1,1
4b	2	2	0,0,0,0,0,0

Ascending composition series:  
4a 4b 1a 1a 1a 4b

Der Modul hat also drei verschiedene Konstituenten. Mit „decompose“ können wir ihn in unzerlegbare direkte Summanden zerlegen.

```

~/tmp> decompose mod_gen
*** PEAK WORD CONDENSATION ***

Peak word for mod_gen4a is 1 (a+b+ab), pol=x
Condensing mod_gen4a: pwr=1, nul=1,
Transforming to standard basis
Peak word for mod_gen1a is 2 (a+b+ab+ab2), pol=x
Condensing mod_gen1a: pwr=1, nul=3,
Transforming to standard basis
Peak word for mod_gen4b is 16 (b+ab+ba), pol=x

```

```

Condensing mod_gen4b: pwr=1, nul=4,
Transforming to standard basis
Next constituent: mod_gen1a
      0
  Vector 1 (seedcount=1) spins up to 5
  Vector 2 (seedcount=2) spins up to 6
  Vector 3 (seedcount=3) spins up to 7
Next constituent: mod_gen4a
      0
  Vector 1 (seedcount=1) spins up to 11
Next constituent: mod_gen4b
      0
  Vector 3 (seedcount=3) spins up to 15

```

```
*** CHOP MODULE ***
```

```

Chop: Dim=6
Split: Subspace=1, Quotient=5
Chop: Dim=1
Irreducible (1a)
Chop: Dim=5
Split: Subspace=1, Quotient=4
Chop: Dim=1
Irreducible (1b)
Chop: Dim=4
Split: Subspace=2, Quotient=2
Chop: Dim=2
Irreducible (2a)
Chop: Dim=2
Irreducible (2a)
Chopping completed: 3 different composition factors
Writing mod_gen.endo.lrr.cfinfo

```

Name	Mult	SF	Fingerprint
1a	1	1	0,0,0,0,0,0
1b	1	1	0,0,0,0,0,0
2a	2	2	0,0,0,0,0,0

Ascending composition series:  
1a 1b 2a 2a

```
*** PEAK WORD CONDENSATION ***
```

```

Peak word for mod_gen.endo.lrr1a is 1 (a+b+ab), pol=x+1
Condensing mod_gen.endo.lrr1a: pwr=1, nul=1,
Transforming to standard basis
Peak word for mod_gen.endo.lrr1b is 1 (a+b+ab), pol=x+4
Condensing mod_gen.endo.lrr1b: pwr=1, nul=1,
Transforming to standard basis
Peak word for mod_gen.endo.lrr2a is 6665 (a3+a5+ba4), pol=x+5
Condensing mod_gen.endo.lrr2a: pwr=2, nul=4,
Transforming to standard basis
Socle 1: 4 = 1a + 1b + 2a

```

.....

```

The 0-th direct summand is: 1a
The 0-th direct summand is: 4a
The 0-th direct summand is: 10a

```

```
~/tmp> decompose mod_gen.endo.lrr
```

.....

```

The 0-th direct summand is: 1a
The 0-th direct summand is: 1b
The 0-th direct summand is: 4a

```

Wie sich zeigt, hat  $k_P^G$  drei unzerlegbare Summanden der Dimensionen 1, 4 und 10. Der zugehörige Endomorphismenring hat korrespondierende PIMs der Dimensionen 1, 1 und 4.

Für diese einzelnen Summanden werden mit den gleichen Befehlen die Konstituenten bestimmt. Mit Hilfe der Zerlegungsmatrix von  $G$  (wie sie beispielsweise unter <http://www.math.rwth-aachen.de/homes/MOC/decomposition/> zu finden ist) versuchen wir dann, die einzelnen Konstituenten in den unzerlegbaren Moduln wiederzufinden. Auf diese Weise bestimmen wir die Zerlegungsmatrix  $D$  des Permutationsgitters (Definition 1.4.1), die ja gleich der Zerlegungsmatrix des Endomorphismenrings ist.

Dabei beginnen wir typischerweise mit Konstituenten des Permutationsmoduls  $k_P^G$  von großer Dimension. In nicht eindeutigen Fällen machen wir mögliche Annahmen und zeigen, dass unter diesen nur eine nicht zum Widerspruch führt. Gibt es immer noch mehrere Möglichkeiten, so hilft die Zerlegung der rechtsregulären Darstellung des Endomorphismenrings in seine PIMs. Der Vergleich mit möglichen Annahmen an  $k_P^G$  und den Dimensionen der korrespondierenden PIMs des zerlegten Endomorphismenrings reduziert die Möglichkeiten weiter. Schließlich kann die Berechnung von  $D^{tr}D$  aller möglichen Zerlegungsmatrizen und der

Vergleich mit der Cartan-Matrix des Endomorphismenrings in unseren Fällen alle Mehrdeutigkeiten ausschalten. Die resultierenden Zerlegungsmatrizen entnehme man der anschließenden Beispielsammlung.

**Bestimmung der Gewichts-Green-Korrespondenten** Nach Lemma 3.3.13 wissen wir, dass sich die Gewichts-Green-Korrespondenten aller Gewichtsmodule als direkte Summanden im Permutationsmodul wiederfinden. Um Alperins Vermutung im Hinblick auf den Endomorphismenring untersuchen zu können, müssen wir diese Gewichts-Green-Korrespondenten identifizieren. GAP bietet mit seinen Funktionen rund um „TableOfMarks()“ eine großartige Hilfe. So kann man die  $p$ -Untergruppen leicht extrahieren und die Charaktere der Faktorgruppen des Normalisators einer solchen  $p$ -Untergruppe nach dieser Untergruppe auf Defekt-0-Eigenschaft untersuchen. Überdies stellt die Theorie bereits genügend starke Kriterien bereit, damit nicht alle Klassen von  $p$ -Untergruppen untersucht werden müssen. Das obige Beispiel lässt sich konkret wie folgt behandeln.

```
gap> tom := TableOfMarks(g);;
gap> Factors(Size(g));
[ 2, 2, 3, 5 ]
gap> ord := OrdersTom(tom);; l := Length(ord);;
gap> fil := Filtered([1..l], i->IsInt(2^2/ord[i]));
[ 1, 2, 4 ]
gap> for i in fil do q := RepresentativeTom(tom,i);;
>n := Normalizer(g,q);; fg := FactorGroup(n,q);;
> Print("i=",i, ", Size(q):",Factors(Size(q)),"\n");
>Display(CharacterTable(fg));;
>Print("*****\n \n");od;
i=1, Size(q):[ 1 ]
CT1

      2  2  2  .  .  .
      3  1  .  1  .  .
      5  1  .  .  1  1

      1a 2a 3a 5a 5b
2P 1a 1a 3a 5b 5a
3P 1a 2a 1a 5b 5a
5P 1a 2a 3a 1a 1a

X.1    1  1  1  1  1
X.2    3 -1  .  A *A
X.3    3 -1  . *A  A
X.4    4  .  1 -1 -1
```

```
X.5      5  1 -1  .  .
```

```
A = -E(5)-E(5)^4
    = (1-ER(5))/2 = -b5
*****
```

```
i=2, Size(q):[ 2 ]
CT2
```

```
2  1  1
```

```
1a 2a
```

```
X.1      1  1
```

```
X.2      1 -1
```

```
*****
```

```
i=4, Size(q):[ 2, 2 ]
CT3
```

```
3  1  1  1
```

```
1a 3a 3b
```

```
X.1      1  1  1
```

```
X.2      1  A /A
```

```
X.3      1 /A  A
```

```
A = E(3)
    = (-1+ER(-3))/2 = b3
*****
```

Wir sehen, dass für  $i = 1$  ein projektiv einfacher Modul existiert und für  $i = 4$  drei 1-dimensionale Gewichtsmodule. Insgesamt gibt es vier Gewichtsmodule und damit ist jeder unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$  ein Gewicht-Green-Korrespondent.

Nachdem eine Gewicht-Untergruppe  $Q$  gefunden ist, wird der Permutationsmodul  $k_Q^N$  berechnet, den wir als Inflation über  $Q$  des regulären  $kN/Q$ -Moduls betrachten. Dieser Modul wird an die MeatAxe übergeben, um die einfachen Konstituenten zu bestimmen.

Wir führen das exemplarisch an  $i = 4$  für das obige Beispiel durch:

```
gap> q := RepresentativeTom(tom,4);; n := Normalizer(g,q);;
```

```
gap> weight := MeatAxeStringRightCoset(n,q,4);;
gap> Length(weight);
3
gap> FileString("tmp/weight_1",weight[1]);;
gap> FileString("tmp/weight_2",weight[2]);;
gap> FileString("tmp/weight_3",weight[3]);;
```

Mit der MeatAxe zerlegen wir diesen Modul.

```
~/tmp> chop -g 3 weight
*** CHOP MODULE ***
```

```
Chop: Dim=3
Split: Subspace=1, Quotient=2
Chop: Dim=1
Irreducible (1a)
Chop: Dim=2
Split: Subspace=1, Quotient=1
Chop: Dim=1
Irreducible (1b)
Chop: Dim=1
Irreducible (1c)
```

```
Chopping completed: 3 different composition factors
Writing weight.cfinfo
```

Name	Mult	SF	Fingerprint
1a	1	1	0,1,0,1,0,1
1b	1	1	0,1,0,0,1,0
1c	1	1	0,1,0,0,1,0

```
Ascending composition series:
1a 1b 1c
```

```
~/tmp> zpr weight1b.1 gap_weight1b.1
~/tmp> zpr weight1b.2 gap_weight1b.2
~/tmp> zpr weight1b.3 gap_weight1b.3
```

Diese einfachen  $kN$ -moduln geben wir erneut an GAP zurück, bilden mit der Funktion „GModuleByMats()“ den entsprechenden Modul in GAP und induzieren mit „InducedGModule()“ nach  $G$ .

Exemplarisch führen wir das an dem Konstituenten „weight.1b“ vor. Analoge Rechnungen müssen dann noch für „weight.1a“ und „weight.1c“ durchgeführt werden.

```
gap> m1 := ScanMeatAxeFile("tmp/gap_weight1b.1");;
gap> m2 := ScanMeatAxeFile("tmp/gap_weight1b.2");;
gap> m3 := ScanMeatAxeFile("tmp/gap_weight1b.3");;
gap> gmod := GModuleByMats([m1,m2,m3],GF(4));;
gap> ind := InducedGModule(g,n,gmod);;
gap> ind1 := MeatAxeString(ind.generators[1],4);;
gap> ind2 := MeatAxeString(ind.generators[2],4);;
gap> FileString("tmp/ind1b_1",ind1);;
gap> FileString("tmp/ind1b_2",ind2);;
```

Jetzt können wir die gleiche Prozedur wie bei der Berechnung des Permutationsmoduls durchlaufen und enden mit einer Zerlegung des induzierten Gewichtsmoduls in seine unzerlegbaren Summanden.

```
~/tmp> zcv ind1b_1 ind1b.1
5x5 permutation matrix over GF(4)
~/tmp> zcv ind1b_2 ind1b.2
5x5 matrix over GF(4)
~/tmp> chop -Q ind1b
~/tmp> decompose ind1b
*** PEAK WORD CONDENSATION ***

Peak word for ind1b1a is 1 (a+b+ab), pol=x+1
  Condensing ind1b1a: pwr=1, nul=1,
  Transforming to standard basis
Peak word for ind1b2a is 7 (ab2+bab+bab2), pol=x+2
  Condensing ind1b2a: pwr=1, nul=1,
  Transforming to standard basis
Peak word for ind1b2b is 7 (ab2+bab+bab2), pol=x+3
  Condensing ind1b2b: pwr=1, nul=1,
  Transforming to standard basis
Next constituent: ind1b1a
      0
Vector 1 (seedcount=1) spins up to 3
Next constituent: ind1b2a
      0
Next constituent: ind1b2b
      0
Vector 1 (seedcount=1) spins up to 5
```

```
*** CHOP MODULE ***
```

```
Chop: Dim=1
Irreducible (1a)
```

```
Chopping completed: 1 different composition factors
Writing ind1b.endo.lrr.cfinfo
```

```
Name   Mult  SF  Fingerprint
1a      1    1  0,1,0,1,0,1
```

```
Ascending composition series:
1a
```

```
*** PEAK WORD CONDENSATION ***
```

```
Peak word for ind1b.endo.lrr1a is 1 (a+a+a2), pol=x+1
```

```
Condensing ind1b.endo.lrr1a: pwr=1, nul=1,
```

```
Transforming to standard basis
```

```
Socle 1: 1 = 1a
```

```
The 0-th direct summand is: 5a
```

Die Interpretation ist bei dem obigen Beispiel einfach, denn der induzierte Summand ist schon unzerlegbar und somit der Gewichts-Green-Korrespondent des Gewichtsmoduls „weight.1b“ mit Vertex  $Q$  der Ordnung 4. Die übrigen Ergebnisse für  $A_5$  in Charakteristik 2 entnehme man der Beispielsammlung auf Seite [133](#).

## 5.5 Anmerkung zu den Ergebnissen

Wir werden die Berechnung von  $G := \mathrm{Sp}_6(2)$  ausführlich kommentieren und die Darstellungsweise, die auch bei allen anderen Beispielen gewählt wurde, erläutern. Dadurch können wir die Ergebnisse der übrigen Berechnungen in knapper Darstellungsweise aufnehmen.

Alle Kommentare heben wir durch kursive Schreibweise hervor. In diesem Abschnitt seien  $p$  eine Primzahl,  $(K, \mathcal{O}, k)$  ein  $p$ -modulares Zerfallungssystem von  $G$  und  $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ . Den  $\mathcal{O}G$ -Endomorphismenring des Permutationsmoduls  $\mathcal{O}_P^G$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{E}$ .

$$G = \mathrm{Sp}_6(2), P \in \mathrm{Syl}_2(G), |G| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Es sei  $F$  ein (beliebiger) Körper. Erlaubt die Größe des Beispiels die Berechnung der Dimension des Zentrums von  $\mathfrak{E}^F := \mathrm{End}_{FG}(F_P^G)$ , so führen wir die Dimension hier auf. Dann bezeichnet  $\dim_F(\mathfrak{Z}_P^G)$  die Dimension des Zentrums von  $\mathfrak{E}^F$ . Ist die Dimension von der Charakteristik abhängig, so werden die unterschiedlichen Dimensionen einzeln aufgelistet. Wenn möglich, werden auch die Dimensionen der Endomorphismenringe  $\mathrm{End}_{FG}(F_P^N)$  und  $\mathrm{End}_{FN}(F_N^G)$  für  $N := N_G(P)$  aufgenommen.

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	15	27	35	84	120	168	216	280	512
VFH	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$3_1$	$3_2$	$1_3$	$3_3$	$2_2$	$3_4$	$1_4$

Der (gewöhnliche) Permutationscharakter  $1_P^G$  wird in seine irreduziblen Konstituenten zerlegt. Dabei steht dim für die Dimension des entsprechenden Konstituenten und VFH für die Vielfachheit, mit der dieser Konstituent in  $1_P^G$  vorkommt. Diese Vielfachheiten werden mit Indizes versehen, weil sie genau die Dimensionen der gewöhnlichen irreduziblen  $\mathfrak{E}^K := \mathrm{End}_{KG}(K_P^G)$ -Charaktere sind, die wir dadurch nummerieren und ihre Korrespondenz zu den gewöhnlichen  $KG$ -Charakteren angeben (vergleiche Satz 2.1.6).

Können wir die gewöhnliche Charaktertafel von  $\mathfrak{E}^K$  berechnen und übersichtlich darstellen, so ist diese hier abgedruckt. Die Spalten der gewöhnlichen Charaktertafel sind mit den Basiselementen der Standardbasis indiziert (Satz 2.1.22). Die letzte, abgesetzte Spalte gibt die Dimension des zu  $\mu_i \in \mathrm{Irr}_K(\mathfrak{E}^K)$  korrespondierenden gewöhnlichen Charakters von  $KG$  an. Unser Beispiel erlaubt wegen seiner Größe diese Berechnung nicht.

$$p = 2, G = \mathrm{Sp}_6(2), P \in \mathrm{Syl}_2(G), |G| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	512	748	568	314	496	134	62
1	1		8	6	6	4	4	2
512		1						
6			10	8	8	6	5	4
8			3	2	2	2	3	1
14			8	2	2	2	1	2
48			4	2	2	2	1	
64			2	3	1	1		
112			2	1		2		
soc	1	512	48	64	14	112	8	6

In der Matrix, die mit  $k_P^G$  bezeichnet ist, finden wir die Auflistung der Konstituenten der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ . Dabei sind die Spalten dieser Matrix mit den Dimensionen dieser direkten Summanden nummeriert. Exponenten an diesen Dimensionen deuten auf die entsprechende Vielfachheit des Summanden in  $k_P^G$  hin. In allen Beschreibungen und Auswertungen benennen wir Moduln mit ihrer Dimension. In der letzten Zeile findet man zusätzlich den Sockel des jeweiligen direkten Summanden. Im obigen Beispiel sind alle Sockel einfach. Ist ein Sockel nicht einfach, so steht, wenn nicht anders gesagt, das „ $\oplus$ “-Zeichen zwischen den einzelnen Konstituenten. Beachte, dass nach Lemma 3.4.3 die Anzahl der einfachen  $kG$ -Konstituenten der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  gleich der Anzahl aller einfachen  $kG$ -Moduln ist. Alperins Vermutung behauptet folglich, dass die Anzahl der inneren Zeilen (zwischen den waagerechten Trennungsstrichen) von  $k_P^G$  gleich der Anzahl der Gewichtsmodule ist.

$C_P^G$	1	1 <sub>2</sub>	11 <sub>1</sub>	7 <sub>1</sub>	11 <sub>2</sub>	5 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	5 <sub>2</sub>
1 <sub>1</sub>	1							
1 <sub>2</sub>		1						
1 <sub>3</sub>			4	2	2	2	1	
1 <sub>4</sub>			2	3	1	1		
1 <sub>5</sub>			2	1	4		2	2
1 <sub>6</sub>			2	1		2		
1 <sub>7</sub>			1		2		3	1
1 <sub>8</sub>					2		1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>512</b>	<b>748</b>	<b>568</b>	<b>314</b>	<b>496</b>	<b>134</b>	<b>62</b>
$2^x$	$2^0$	$2^9$	$2^2$	$2^3$	2	$2^4$	2	2
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>

$C_P^G$  ist die Cartan-Matrix des Endomorphismenrings  $\mathfrak{E}^k = \text{End}_{kG}(k_P^G)$ . Sie birgt wohl die wichtigste und aussagekräftigste Struktur für diese Arbeit. Unten schließen sich noch verschiedene Zeilen an, die für die Untersuchung der Gewichts-Green-Korrespondenten von besonderer Bedeutung sind. Zum einen korrespondiert nach dem Satz von Fitting 1.2.5 jeder PIM des Endomorphismenrings zu einem unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ . Diese Korrespondenz wird durch die mit  $k_P^G$  indizierte Zeile unter dem zweiten Trennungsstrich verdeutlicht, indem wir jeden direkten Summanden des Permutationsmoduls in die Spalte seines korrespondierenden PIMs schreiben. Fett gedruckt sind dabei diejenigen unzerlegbaren direkten Summanden, die gleichzeitig Gewichts-Green-Korrespondenten sind. Darunter finden wir eine Zeile mit der Indizierung  $p^x$ . Ein Eintrag in dieser Zeile gibt die  $p$ -Potenz der Dimension des entsprechenden direkten Summanden von  $k_P^G$  wieder.

In der dritten Zeile unter dem zweiten Trennungsstrich in der Cartan-Matrix finden wir die Sockel der PIMs, aufgespalten nach ihren Konstituenten. So kann der

Leser direkt die Äquivalenzklassen aus Abschnitt 5.3 ablesen und hat gleichzeitig die  $p$ -Potenzen der Dimensionen der zugehörigen unzerlegbaren direkten Summanden vor Augen. Schließlich stehen in der letzten Zeile die Köpfe der PIMs von  $\mathfrak{E}^k$ , die nach Theorie stets einfach sind. Schematisch haben wir folgende Matrix:

$C_P^G$	Dimensionen der PIMs von $\mathfrak{E}^k$
Dim. d. einf. $\mathfrak{E}^k$ -Moduln	
$k_P^G$	Dimensionen der zugehörigen Summanden von $k_P^G$
$p^x$	höchste $p$ -Potenz in der Dimension des $k_P^G$ -Summanden darüber
soc	Sockel des PIMs von $\mathfrak{E}^k$ in dieser Spalte
hd	Kopf des PIMs von $\mathfrak{E}^k$ in dieser Spalte

Danach folgt die Zerlegungsmatrix von  $\mathfrak{E}$ .

$D_P^G$	1	512	568	748	314	496	134	62	
1	1								$1_1$
512		1							$1_4$
15							1		$1_2$
27					1		1	1	$2_1$
35					1		1	1	$3_1$
84			1		1		1		$3_2$
120				1					$1_3$
168			1	1	1				$3_3$
216			1			1			$2_2$
280			1	1		1			$3_4$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	

IT=  $[1^8]$

Die Matrix  $D_P^G$  ist die Zerlegungsmatrix des Gitters  $\mathcal{O}_P^G$ . Die Spalten werden oben mit den unzerlegbaren direkten Summanden des Permutationsmoduls  $\mathcal{O}_P^G$  nummeriert. Ihre Zerlegung in gewöhnliche irreduzible Charaktere finden wir, wenn wir die linke Nummerierung der Zeilen betrachten, in denen genau die Konstituenten des Permutationscharakters  $1_P^G$  stehen. Gleichzeitig gibt diese Matrix auch die Zerlegungsmatrix des Endomorphismenrings  $\mathfrak{E}$  wieder, wenn wir stattdessen die rechte Nummerierung der Zeilen betrachten. Die Bezeichnung der Moduln folgt

derjenigen aus der Tabelle „Konstituenten des Permutationsmoduls“. Die Indizierung der einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln finden wir in der untersten Zeile der Zerlegungsmatrix. „Links oben“ gehört zu  $\mathcal{OG}$ , „rechts unten“ zu  $\mathfrak{E}$ . Die Zerlegungsmatrix liest sich also wie folgt:

$D_P^G$	Dimensionen der unzerlegbaren Summanden von $\mathcal{O}_P^G$	
<i>Dim. d. Konst. v. <math>K_P^G</math></i>		<i>Dim. d. zugeh. <math>\mathfrak{E}^k</math>-Moduln</i>
	Dimensionen der einfachen $\mathfrak{E}^k$ -Moduln	

Wir haben für viele Zerlegungsmatrizen auch deren Invariantenteiler bestimmt, die wir mit „IT“ bezeichnen. In obigem Beispiel sind alle Invariantenteiler der Zerlegungsmatrix von  $\mathfrak{E}$  gleich 1.

Der Zerlegungsmatrix folgt die Bestimmung der Gewichts-Green-Korrespondenten und eine Überprüfung der Vermutung aus Abschnitt 5.3. Für obiges Beispiel gilt Folgendes:

**Bemerkung:** Weil  $\mathrm{Sp}_6(2)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius. Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Der unzerlegbare direkte Summand 512 von  $k_P^G$  ist ein projektiv einfacher Gewichtsmodul. Der Gewichts-Green-Korrespondent 496 hat einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung  $2^5$ . Für die Induktion des Gewichtsmoduls nach  $G$  gilt:

$${}^{16}S_{N_G(Q_1)}^G = \mathbf{496} \oplus 512.$$

$S$  bezeichnet den einfachen  $kN_G(Q_1)$ -Modul mit Vertex  $Q_1$ , also einen Gewichtsmodul. Dabei benutzen wir stets die Abkürzung  $N := N_G(P)$ , falls eine  $p$ -Sylowgruppe  $P$  Vertex des Moduls ist. Die links an  $S$  hochgestellte Zahl ist die Dimension des Gewichtsmoduls. Haben mehrere Gewichtsmoduln gleicher Dimension konjugierte Vertizes, so haben die an  $S$  hochgestellten Dimensionen einen Index. In diesem Fall entspricht die Reihenfolge weitgehend der in den konkreten Rechnungen ausgegebenen Reihenfolge, so dass man mit Zugriff auf die Dateien die Moduln wiederfindet.

In der Zerlegung des induzierten Gewichtsmoduls steht der Gewichts-Green-Korrespondent zuerst und ist in Fettschrift abgedruckt. Die Beispiele werden vor allem

in Hinsicht auf die Eigenschaft „Gewichts-Green-Korrespondenten“ kommentiert. In diesem Zusammenhang werden wir häufig von „Äquivalenzklassen“ der PIMs von Endomorphismenringen, der „Vermutung“ und der „Beobachtung“ sprechen. Gemeint sind damit immer die Bezeichnungen aus Abschnitt 5.3.

Der Gewichts-Green-Korrespondent 568 hat einen Vertex  $Q_2$  der Ordnung  $2^6$ . Die Induktion des Gewichtsmoduls nach  $G$  ergibt:

$${}^8S_{N_G(Q_2)}^G = \mathbf{568} \oplus 512.$$

Weiterhin ist 748 ein Gewichts-Green-Korrespondent mit Vertex  $Q_3$  der Ordnung  $2^7$ . Die Induktion des entsprechenden Gewichtsmoduls nach  $G$  ergibt:

$${}^4S_{N_G(Q_3)}^G = \mathbf{748} \oplus 512.$$

Die unzerlegbaren direkten Summanden 134, 314 und 62 haben Vertizes der Ordnung  $2^8$ , die aber untereinander nicht konjugiert sind. Die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  ergeben:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N_G(Q_4)}^G &= \mathbf{134} \oplus 496 \oplus 748 \oplus 512, \\ {}^2S_{N_G(Q_5)}^G &= \mathbf{314} \oplus 496 \oplus 568 \oplus 512, \\ {}^2S_{N_G(Q_6)}^G &= \mathbf{62} \oplus 512 \oplus 568 \oplus 748. \end{aligned}$$

Die Gewichtsmoduln  ${}^2S_{N_G(Q_i)}^G$  haben für  $5 \leq i \leq 6$  eine hochgestellte Dimensionsangabe ohne Index, weil die entsprechenden Vertizes untereinander nicht konjugiert sind.

Für den trivialen Modul gilt  ${}^1S_N^G = k_P^G$ , weil  $N_G(P) = P$  ist.

## 5.6 Datensammlung

### 5.6.1 $G = A_5$

$$\boxed{G = A_5, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 2$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|ccc} 1 & 4 & 5 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 2 \end{array}$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|ccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 \end{array}$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cc} 1 & 4 \\ \hline 1_1 & 1_2 \end{array}$$

Charaktertafeln:

$$\text{End}_{KG}(K_P^G) : \begin{array}{c|cccccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ \mu_2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ \mu_3 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) : \begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 1 & A & A^2 & 1_2 \\ \mu_3 & 1 & A^2 & A & 1_3 \end{array} \quad A = E(3)$$

$$\text{End}_{KN}(K_N^G) : \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 4 & 1 \\ \mu_1 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

$$p = 2, G = A_5, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Die 2-Sylow-Gruppe von  $G$  ist isomorph zu einer Kleinschen Vierer-Gruppe und insbesondere elementar-abelsch.

$k_P^G$	1	4	$5_1$	$5_2$	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$
$1_1$	1		1	1	$1_1$	1			
4		1			$1_2$		1		
$2_1$			1	1	$1_3$			1	1
$2_2$			1	1	$1_4$			1	1
soc	$1_1$	4	$2_1$	$2_2$	$k_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}_1$	$\mathbf{5}_2$
hd	1	4	$2_2$	$2_1$	$2^x$	$2^0$	$2^2$	$2^0$	$2^0$
					soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$
					hd	$1_1$	$1_2$	$1_4$	$1_3$

**Beachte:** Die PIMs  $2_1$  und  $2_2$  des Endomorphismenrings haben in Charakteristik 0 den gleichen Charakter, ebenso die beiden unzerlegbaren direkten Summanden  $5_1$  und  $5_2$  von  $k_P^G$ .

Wegen  $A_5 \cong \text{SL}_2(4)$  ist  $A_5$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik. Folglich ist  $\mathfrak{C}^k$  nach Satz 3.4.8 quasi-Frobenius, aber nicht symmetrisch, da die Diagonaleinträge  $c_{33}$  und  $c_{44}$  in der Cartan-Matrix nicht größer als 1 sind.

$D_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}_1$	$\mathbf{5}_2$	
1	1				$1_1$
4		1			$1_2$
5			1	1	2
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	

$$IT = [1, 1, 1]$$

Weil  $G$  eine Gruppe mit zerfallendem  $BN$ -Paar ist, stimmt die Vermutung 5.3.1 (vergleiche auch Seite 115).

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{4}, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{5}_1, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{5}_2. \end{aligned}$$

Für den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$  gilt:

$$\begin{array}{c|cc} k_N^G & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & \\ 4 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} C_N^G & 1_1 & 1_2 \\ \hline 1_1 & 1 & \\ 1_2 & & 1 \\ \hline & 1 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|c} D_N^G & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & & 1_1 \\ 4 & & 1 & 1_2 \\ \hline & 1_1 & 1_2 & \end{array} \quad IT = [1, 1]$$


---



---

$$\boxed{G = A_5, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 5$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 2$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 3$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \begin{array}{c|ccccc} \dim & 1 & 3_1 & 3_2 & 4 & 5 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 2 & 1_4 \end{array}$$

$$1_P^N : \begin{array}{c|cc} \dim & 1_1 & 1_2 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 \end{array}$$

$$1_N^G : \begin{array}{c|ccc} \dim & 1 & 4 & 5 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 \end{array}$$

Charaktertafeln:

$$\text{End}_{KG}(K_P^G) : \begin{array}{c|cccccccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_8 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & 1 & -1 & A & -A & 1 & -1 & 3_1 \\ \mu_3 & 1 & -1 & 1 & -1 & -A & A & 1 & -1 & 3_2 \\ \mu_4 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ \mu_5 & 2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 4 \end{array}$$

$$A = -E(5) + E(5)^2 + E(5)^3 - E(5)^4$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) : \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\text{End}_{KG}(K_N^G) : \begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ \mu_2 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ \mu_3 & 1 & -2 & 1 & 5 \end{array}$$

$$p = 3, G = A_5, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$k_P^G$	$3_1$	$3_2$	1	4	9
$3_1$	1				
$3_2$		1			
1			1		1
4				1	2
soc	$3_1$	$3_2$	1	4	4
hd	$3_1$	$3_2$	1	4	4

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	2	3
$1_1$	1				
$1_2$		1			
$1_3$			1		
$1_4$				1	1
$1_5$				1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>3<sub>1</sub></b>	<b>3<sub>2</sub></b>	<b>4</b>	<b>9</b>
$3^x$	$3^0$	3	3	$3^0$	$3^2$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_5$	$1_5$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockel von  $\mathfrak{E}^k$  zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius ist; die unzerlegbaren direkten Summanden **4** und **9** von  $k_P^G$  haben beide den irreduziblen Summanden der Dimension 4 als Sockel.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>3<sub>1</sub></b>	<b>3<sub>2</sub></b>	<b>4</b>	<b>9</b>	
1	1					1 <sub>1</sub>
3 <sub>1</sub>		1				1 <sub>2</sub>
3 <sub>2</sub>			1			1 <sub>3</sub>
4				1	1	2
5					1	1 <sub>4</sub>
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	

$IT = [1, 1, 1, 1, 1]$

Die beiden direkten Summanden  $\mathbf{3}_1$  und  $\mathbf{3}_2$  sind einfache PIMs von  $kG$ . Die übrigen Gewichts-Green-Korrespondenten 1 und 4 liegen im Hauptblock und haben eine  $p$ -Sylowgruppe als Vertex. Zudem gilt

$${}^1S_N^G = \mathbf{1} \oplus 9,$$

so dass wir schließen können, dass 9 ein projektiver Modul ist. Schließlich ist

$${}^2S_N^G = \mathbf{4} \oplus \mathbf{3}_1 \oplus \mathbf{3}_2.$$

Beachte, dass die PIMs 2 und 3 des Endomorphismenrings beide  $1_5$  als Sockelkonstituenten haben und somit eine Äquivalenzklasse bilden. Der zu 2 korrespondierende unzerlegbare direkte Summand 4 in  $k_P^G$  ist ein Gewichts-Green-Korrespondent, der zum PIM 3 korrespondierende direkte Summand 9 nicht. Dabei wird 9 von  $p = 3$  geteilt, 4 jedoch nicht. Insgesamt wird die Vermutung aus Abschnitt 5.3 hier bestätigt.

Für den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$  gilt schließlich:

$k_N^G$	1	4	$C_N^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	$D_N^G$	1	4	$IT = [1, 1]$
1	1		1 <sub>1</sub>	1		1	1		
4	1		1 <sub>2</sub>	1		4	1		

$G = A_5, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 2$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 2$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccc} 1 & 3_1 & 3_2 & 5 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array}$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cc} 1_1 & 1_2 \\ \hline 1_1 & 1_2 \end{array}$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cc} 1 & 5 \\ \hline 1_1 & 1_2 \end{array}$$

**Beachte:** Die Endomorphismenringe sind kommutativ.

Charaktertafeln:

$$\text{End}_{KG}(K_P^G) : \begin{array}{c|cccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 1 & A & -A & -1 & 3_1 \\ \mu_3 & 1 & -A & A & -1 & 3_2 \\ \mu_4 & 1 & -1 & -1 & 1 & 5 \end{array}$$

$$A = E(5) - E(5)^2 - E(5)^3 + E(5)^4$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) : \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 1 & 1_1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & 1_2 \end{array}$$

$$\text{End}_{KG}(K_N^G) : \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 5 & 1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & 5 \end{array}$$

$$\boxed{p = 5, G = A_5, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Beachte, dass die 5-Sylow-Gruppe zyklisch ist.

$$\begin{array}{c|ccc} k_P^G & 1 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & & \\ 5 & & 1 & \\ 3 & & & 2 \\ \hline \text{soc} & 1 & 5 & 3 \\ \text{hd} & 1 & 5 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} C_P^G & 1_1 & 1_2 & 2 \\ \hline 1_1 & 1 & & \\ 1_2 & & 1 & \\ 1_3 & & & 2 \\ \hline k_P^G & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 5^x & 5^0 & 5 & 5^0 \\ \text{soc} & 1_1 & 1_2 & 1_3 \\ \text{hd} & 1_1 & 1_2 & 1_3 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc|c} D_P^G & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \\ \hline 1 & 1 & & & 1_1 \\ 5 & & 1 & & 1_2 \\ 3_1 & & & 1 & 1_3 \\ 3_2 & & & & 1 \\ \hline & 1_1 & 1_2 & 1_3 & \\ \hline \end{array}$$

$$IT = [1, 1, 1]$$

Wegen  $A_5 \cong \text{PSL}_2(5)$  ist  $A_5$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik und somit ist  $\mathfrak{C}^k$  quasi-Frobenius (vgl. Satz 3.4.8). Zudem ist Vermutung 5.3.1 nach der Bemerkung auf Seite 115 richtig. Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_{N(Q)}^G &= \mathbf{1} \oplus 5, \\ {}^2S_{N(Q)}^G &= \mathbf{6}. \end{aligned}$$

Für den Endomorphismenring von  $k_N^G$  gilt schließlich:

$$\begin{array}{c|c} k_N^G & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C_N^G & 2 \\ \hline 1_1 & 1 \\ 1_2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} D_N^G & 5 \\ \hline 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \quad IT = [1]$$


---



---

### 5.6.2 $G = S_5$

$$\boxed{G = S_5, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 4$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

$$1_P^G = 1_N^G : \begin{array}{c|cccc} \dim & 1 & 4 & 5_1 & 5_2 \\ \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array}$$

**Beachte:** Der Endomorphismenring ist kommutativ.

Charaktertafel:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	2	4	8	1
$\mu_2$	1	2	-1	-2	4
$\mu_3$	1	-1	-2	2	$5_1$
$\mu_4$	1	-1	2	-2	$5_2$

$$\boxed{p = 2, G = S_5, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

$k_P^G$	4	1	10	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2$	$D_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{10}$	$IT = [1^3]$	
$4_1$	1			$1_1$	1			1	1		$1_1$		
1		1	2	$1_2$		1		4		1	$1_2$		
$4_2$			2	$1_3$			2	$5_1$			1		$1_3$
soc	$4_1$	1	$4_2$	$k_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{10}$	$5_2$		1	$1_4$		
hd	$4_1$	1	$4_2$	$2^x$	$2^0$	$2^2$	$2$		$1_1$	$1_2$	$1_3$		
				soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$						
				hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$						

**Bemerkung:** Wegen  $S_5 \cong \mathrm{PGL}_2(5)$  ist  $S_5$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik und  $\mathfrak{E}^k$  ist folglich quasi-Frobenius (vergleiche Satz 3.4.8) und die Vermutung 5.3 nach der Bemerkung auf Seite 115 richtig.

Der 1-dimensionale Modul  $1_1$  von  $\mathfrak{E}^k$  ist ein einfacher PIM, ohne dass der korrespondierende 4-dimensionale Modul in  $kG$  einfach und projektiv ist. Die beiden anderen unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  liegen im Hauptblock. Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt: Der 4-dimensionale direkte Summand hat einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung 2. Wir haben

$${}^2_1 S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{4} \oplus 16.$$

Der 10-dimensionale direkte Summand hat einen Vertex  $Q_2$  der Ordnung 4. Wir haben

$${}^2_1 S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{10}.$$

Für den trivialen direkten Summanden gilt:

$${}^1 S_N^G = \mathbf{1} \oplus 4 \oplus 10.$$

$$G = S_5, P \in \mathrm{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 7$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 3$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\mathrm{VFH}} \left| \begin{array}{cccccc} 1_1 & 1_2 & 4_1 & 4_2 & 5_1 & 5_2 & 6 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 2_1 & 2_2 & 1_3 & 1_4 & 2_3 \end{array} \right.$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\mathrm{VFH}} \left| \begin{array}{cccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array} \right.$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\mathrm{VFH}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 \end{array} \right.$$

**Beachte:** Die 3-Sylow-Gruppe ist zyklisch vom Typ  $C_3$ . Außerdem sind die Endomorphismenringe  $\text{End}_{KN}(K_P^N)$  und  $\text{End}_{KG}(K_N^G)$  kommutativ.

Charaktertafeln:

$\text{End}_{KG}(K_P^G)$  :

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\mathbf{a}_9$	$\mathbf{a}_{10}$	$\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{12}$	$\mathbf{a}_{13}$	$\mathbf{a}_{14}$	$\mathbf{a}_{15}$	$\mathbf{a}_{16}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1
$\mu_2$	1	-1	-3	3	-3	3	3	-3	-3	3	-3	3	3	-3	-1	1	1
$\mu_3$	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-1	-1	0	0	$4_1$
$\mu_4$	2	-2	-2	2	-2	2	-1	1	2	-2	2	-2	-1	1	0	0	$4_2$
$\mu_5$	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	$5_1$
$\mu_6$	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	$5_2$
$\mu_7$	2	0	0	-2	0	-2	2	0	0	0	0	0	2	0	0	-2	6

$\text{End}_{KN}(K_P^N)$  :

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	1	1	1	$1_1$
$\mu_2$	1	-1	-1	1	$1_2$
$\mu_3$	1	1	-1	-1	$1_3$
$\mu_4$	1	-1	1	-1	$1_4$

$\text{End}_{KG}(K_N^G)$  :

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	-2	1	1
$\mu_2$	1	1	-2	4
$\mu_3$	1	6	3	5

$p = 3, G = S_5, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$k_P^G$	$6^2$	$1_1$	$9_1$	$4_1$	$1_2$	$9_2$	$4_2$	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1^2$	$2_2$	$3_1$	$2_3$	$3_2$
6	1							$1_1$	1						
$1_1$		1	1					$1_2$		1					
$4_1$			2	1				2			1				
$1_2$					1	1		$1_3$				1	1		
$4_2$						2	1	$1_4$				1	2		
soc	6	$1_1$	$4_1$	$4_1$	$1_2$	$4_2$	$4_2$	$1_5$						1	1
hd	6	$1_1$	$4_1$	$4_1$	$1_2$	$4_2$	$4_2$	$1_6$						1	2
$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	<b>6</b>	$4_1$	$9_1$	<b><math>4_2</math></b>	$9_2$	$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	<b>6</b>	$4_1$	$9_1$	<b><math>4_2</math></b>	$9_2$
$3^x$	$3^0$	$3^0$	3	$3^0$	$3^2$	$3^0$	$3^2$	$3^x$	$3^0$	$3^0$	3	$3^0$	$3^2$	$3^0$	$3^2$
soc	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$1_4$	$1_4$	$1_6$	$1_6$	soc	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$1_4$	$1_4$	$1_6$	$1_6$
hd	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	hd	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$

**Bemerkung:** Wegen isomorpher Sockel von  $4_1$  und  $9_1$  bzw.  $4_2$  und  $9_2$  kann der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius sein. Insbesondere ist er auch nicht symmetrisch.

$D_P^G$	$1_1$	$1_2$	$6$	$4_1$	$9_1$	$4_2$	$9_2$		
$1_1$	1							$1_1$	
$1_2$		1						$1_2$	
$6$			1					$2_3$	
$4_1$				1	1			$2_1$	$IT = [1^7]$
$5_1$					1			$1_3$	
$4_2$						1	1	$2_2$	
$5_2$							1	$1_4$	
	$1_1$	$1_2$	$2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$		

**Beachte:** Die Sockel von  $2_2$  und  $3_1$  sowie  $2_3$  und  $3_2$  sind isomorph, so dass die beiden Paare jeweils zweielementige Äquivalenzklassen von PIMs bilden. Die zu  $2_2$  bzw.  $2_3$  korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden  $4_1$  bzw.  $4_2$  von  $k_P^G$  sind Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln, die beiden anderen nicht. Beachte, dass  $3 \nmid 4$ , jedoch  $3 \mid 9$  gilt, womit sich die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigen. Alle  $kG$ -Moduln, bis auf den projektiv einfachen der Dimension 6, liegen im Hauptblock und haben  $P$  als Vertex. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned}
 {}^1S_N^G &= \mathbf{1}_1 \oplus \mathbf{9}_1, \\
 {}^2S_N^G &= \mathbf{4}_1 \oplus \mathbf{6}, \\
 {}^3S_N^G &= \mathbf{4}_2 \oplus \mathbf{6}, \\
 {}^4S_N^G &= \mathbf{1}_2 \oplus \mathbf{9}_2.
 \end{aligned}$$

Insbesondere sind  $9_1$  und  $9_2$  projektiv.

Für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und seinen Endomorphismenring gilt:

$k_N^G$	$1$	$9$	$C_N^G$	$1$	$2$	$D_N^G$	$1$	$9$	$IT = [1, 1]$
$1_1$	1		$1_1$	1		$1$	1		
$4$	$2$		$1_2$	$2$		$4$	$1$		
$1_2$	$1$					$5$	$1$		

---

$$\boxed{G = S_5, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 5$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 2$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{ccccc} 1_1 & 1_2 & 5_1 & 5_2 & 6 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \end{array} \right.$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{cccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array} \right.$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1_1 & 1_2 \end{array} \right.$$

Charaktertafeln:

$$\text{End}_{KG}(K_P^G) : \begin{array}{c|cccccccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_8 & \chi(1) \\ \mu_1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1_1 \\ \mu_2 & 1 & -5 & 5 & -5 & 5 & -1 & -1 & 1 & 1_2 \\ \mu_3 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 5_1 \\ \mu_4 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 5_2 \\ \mu_5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) : \begin{array}{c|cccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \chi(1) \\ \mu_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1_2 \\ \mu_3 & 1 & -E(4) & E(4) & -1 & 1_3 \\ \mu_4 & 1 & E(4) & -E(4) & -1 & 1_4 \end{array}$$

$$\text{End}_{KG}(K_N^G) : \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \chi(1) \\ \mu_1 & 1 & 5 & 1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & 5 \end{array}$$


---

$$p = 5, G = S_5, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$6_1$	$6_2$	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1$	$2_2$
$1_1$	1						$1_1$	1					
$1_2$		1					$1_2$		1				
$5_1$			1				$1_3$			1			
$5_2$				1			$1_4$				1		
$3_1$					1	1	$1_5$					1	1
$3_2$					1	1	$1_6$					1	1
soc	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$3_1$	$3_2$	$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$6_1$	$6_2$
hd	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$3_2$	$3_1$	$5^x$	$5^0$	$5^0$	5	5	$5^0$	$5^0$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_6$	$1_5$	soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_6$	$1_5$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$

**Beachte:** Wegen der Einträge  $c_{5,5}$  und  $c_{6,6}$  wissen wir, dass der Endomorphismenring nicht symmetrisch ist. Allerdings lässt sich aus der Cartan-Matrix die hier relevante Struktur von  $\mathfrak{E}^k$  bis auf Morita-Äquivalenz bestimmen. Dabei ist der 4-dimensionale Block von Bedeutung.

Die Konstituenten der PIMs dieses Blocks zeigen, dass es nichttriviale Homomorphismen von  $2_1$  nach  $2_2$  und von  $2_2$  nach  $2_1$  gibt. Bezeichnen wir Basen von  $2_i$  mit  $\langle \mathbf{e}_i, r_i \rangle$  mit  $\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{i,j} \mathbf{e}_i$  für  $i, j = 1, 2$ , so lässt sich mittels obiger Homomorphismen die rechtsreguläre Darstellung von  $\mathfrak{E}^k$  bestimmen. Damit finden wir einen Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{E}^k$  und der Matrix-Algebra über  $k$ , die von den Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

erzeugt wird. Beachte, dass alle einfachen Moduln eindimensional sind, so dass Morita-Äquivalenz bereits aus Algebra-Isomorphie folgt. Vergleiche auch die entsprechend strukturierten Blöcke bei  $G = U_3(5)$ ,  $p = 5$ , Seite 269.

$D_P^G$	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$6_1$	$6_2$		
$1_1$	1						$1_1$	
$1_2$		1					$1_2$	
$5_1$			1				$1_3$	
$5_2$				1			$1_4$	
$6$					1	1	$2$	
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$		$IT = [1, 1, 1, 1, 1]$

**Beachte:** Beide 1-dimensionalen (nicht-projektiven)  $kG$ -Moduln korrespondieren zu einfachen PIMs im Endomorphismenring. Außerdem haben die beiden 6-dimensionalen unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  in Charakteristik 0 denselben Konstituenten. Damit bestätigt sich die Vermutung 5.3.1.

Alle nicht-projektiven Gewichtsmoduln haben  $P$  als Vertex ( $P$  ist kommutativ, vergleiche die Bemerkung auf Seite 61) und für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1}_1 \oplus 5_1, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{1}_2 \oplus 5_2, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{6}_1, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{6}_2. \end{aligned}$$

Für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und seinen Endomorphismenring gilt schließlich:

$$\begin{array}{c|cc} k_N^G & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & \\ 5 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} C_N^G & 1_1 & 1_2 \\ \hline 1_1 & 1 & \\ 1_2 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} D_N^G & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & \\ 5 & & 1 \end{array} \quad IT = [1, 1]$$


---



---

**5.6.3**  $G = A_6$

$$G = A_6, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}) = 6$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	5 <sub>1</sub>	5 <sub>2</sub>	8 <sub>1</sub>	8 <sub>2</sub>	9
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	2

Charaktertafel:

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{a}_7$	$\mathfrak{a}_8$	$\mathfrak{a}_9$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	2	8	8	8	2	4	4	8	1
$\mu_2$	1	-1	-4	2	2	2	-2	-2	2	5 <sub>2</sub>
$\mu_3$	1	-1	-1	A	B	-1	1	1	-1	8 <sub>1</sub>
$\mu_4$	1	-1	-1	B	A	-1	1	1	-1	8 <sub>2</sub>
$\mu_5$	2	1	2	-4	-4	1	0	0	2	9
$\mu_6$	1	2	2	2	2	-1	-2	-2	-4	5 <sub>1</sub>

$$A = E(5) - 2 * E(5)^2 - 2 * E(5)^3 + E(5)^4$$

$$B = -2 * E(5) + E(5)^2 + E(5)^3 - 2 * E(5)^4$$

$$p = 2, G = A_6, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$k_P^G$	8 <sub>1</sub>	8 <sub>2</sub>	1	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>
8 <sub>1</sub>	1					1 <sub>1</sub>	1				
8 <sub>2</sub>		1				1 <sub>2</sub>		1			
1			1	2	2	1 <sub>3</sub>			1		
4 <sub>1</sub>				2	1	1 <sub>4</sub>				2	1
4 <sub>2</sub>				1	2	1 <sub>5</sub>				1	2
soc	8 <sub>1</sub>	8 <sub>2</sub>	1	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	$k_P^G$	<b>1</b>	<b>8<sub>1</sub></b>	<b>8<sub>2</sub></b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>
hd	8 <sub>1</sub>	8 <sub>2</sub>	1	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	$2^x$	2 <sup>0</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>3</sup>	2	2
						soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>
						hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>

Die Eigenschaft des Endomorphismenrings quasi-Frobenius oder symmetrisch zu sein, können wir mit Hilfe der Sockelkonstituenten oder der Cartan-Matrix alleine nicht ausschließen. Beachte jedoch, dass  $A_6 \cong \mathrm{Sp}_4(2)'$  gilt.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>8<sub>1</sub></b>	<b>8<sub>2</sub></b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>	
1 <sub>1</sub>	1					1 <sub>1</sub>
8 <sub>1</sub>		1				1 <sub>4</sub>
8 <sub>2</sub>			1			1 <sub>5</sub>
5 <sub>1</sub>				1		1 <sub>2</sub>
5 <sub>2</sub>					1	1 <sub>3</sub>
9				1	1	2
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	

$IT = [1, 1, 1, 1]$

Alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  sind Gewichtsummoduln. Beachte, dass dies im Einklang mit Alperins Vermutung und der Überlegung nach Satz 3.4.5 steht, falls  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius ist. Insbesondere gilt für die Gewichts-Green-Korrespondenten:

Die beiden direkten Summanden  $8_1$  und  $8_2$  von  $k_P^G$  sind projektiv einfache  $kG$ -Moduln. Des Weiteren haben die beiden direkten Summanden  $14_1$  und  $14_2$  von  $k_P^G$  Vertizes  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  der Ordnung 4, die aber in  $G$  nicht konjugiert sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{14}_1 \oplus 8_1 \oplus 8_2, \\ {}^2S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{14}_2 \oplus 8_1 \oplus 8_2. \end{aligned}$$

Für den trivialen  $kG$ -Modul gilt:

$${}^1S_N^G = \mathbf{1} \oplus 8_1 \oplus 8_2 \oplus 14_1 \oplus 14_2.$$

$$G = A_6, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 5$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 2$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccc} 1 & 5_1 & 5_2 & 9 & 10 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \end{array}$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array}$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cc} 1 & 9 \\ \hline 1_1 & 1_2 \end{array}$$

Charaktertafeln:

$$\text{End}_{KG}(K_P^G) : \begin{array}{c|cccccccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_8 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 1 & 9 & 9 & 9 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 1 & 1 & -3 & -3 & 3 & 3 & -1 & -1 & 5_1 \\ \mu_3 & 1 & 1 & 3 & 3 & -3 & -3 & -1 & -1 & 5_2 \\ \mu_4 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ \mu_5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) : \begin{array}{c|cccc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_1 \\ \mu_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1_2 \\ \mu_3 & 1 & -1 & E(4) & -E(4) & 1_3 \\ \mu_4 & 1 & -1 & -E(4) & E(4) & 1_4 \end{array}$$

$$\text{End}_{KG}(K_N^G) : \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \chi(1) \\ \hline \mu_1 & 1 & 9 & 1 \\ \mu_2 & 1 & -1 & 9 \end{array}$$

$$p = 3, G = A_6, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$k_P^G$	9	1	$10_1$	$10_2$	$10_3$	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$
9	1					$1_1$	1				
1		1	2			$1_2$		1			
4			2	1	1	$1_3$			2		
$3_1$				1	1	$1_4$				1	1
$3_2$				1	1	$1_5$				1	1
soc	9	1	4	$3_1$	$3_2$	$k_P^G$	<b>1</b>	<b>9</b>	<b><math>10_1</math></b>	<b><math>10_2</math></b>	<b><math>10_3</math></b>
hd	9	1	4	$3_2$	$3_1$	$3^x$	$3^0$	$3^2$	$3^0$	$3^0$	$3^0$
						soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_5$	$1_4$
						hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$

**Beachte:** Wegen  $A_6 \cong \text{PSL}_2(9)$  ist  $A_6$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik. Daher ist  $\mathfrak{E}^k$  nach Satz 3.4.8 quasi-Frobenius. Wegen  $c_{4,4} = c_{5,5} = 1$  ist  $\mathfrak{E}^k$  jedoch nicht symmetrisch.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>9</b>	<b><math>10_1</math></b>	<b><math>10_2</math></b>	<b><math>10_3</math></b>	
1	1					$1_1$
9		1				$1_4$
$5_1$			1			$1_2$
$5_2$			1			$1_3$
10				1	1	2
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	

$IT = [1, 1, 1, 1, 0]$

**Bemerkung:** Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig. Der unzerlegbare direkte Summand 9 ist projektiv einfach. Alle übrigen haben die 3-Sylowgruppen als Vertex. Für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{9}, \\ {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{10}_1, \\ {}^1_3 S_N^G &= \mathbf{10}_2, \\ {}^1_4 S_N^G &= \mathbf{10}_3. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und seinen Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$ :

$$\frac{k_N^G}{1} \mid \begin{array}{c} 10 \\ 2 \end{array} \quad \frac{C_N^G}{1} \mid \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \quad \frac{D_N^G}{1} \mid \begin{array}{c} 10 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{array} \quad IT = [1]$$

$$\boxed{G = A_6, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 7 \text{ für } \text{char}(F) \neq 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 8 \text{ für } \text{char}(F) = 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 2$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 6$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\text{dim}}{\text{VFH}} \mid \begin{array}{cccccc} 1 & 5_1 & 5_2 & 8_1 & 8_2 & 9 & 10 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 2_1 & 2_2 & 1_4 & 2_3 \end{array}$$

$$1_P^N : \frac{\text{dim}}{\text{VFH}} \mid \begin{array}{cc} 1_1 & 1_2 \\ 1_1 & 1_2 \end{array}$$

$$1_N^G : \frac{\text{dim}}{\text{VFH}} \mid \begin{array}{cccccc} 1 & 5_1 & 5_2 & 8_1 & 8_2 & 9 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 \end{array}$$

Charaktertafel:

 $\text{End}_{KG}(K_P^G) :$ 

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{a}_7$	$\mathfrak{a}_8$	$\mathfrak{a}_9$	$\mathfrak{a}_{10}$	$\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_{13}$	$\mathfrak{a}_{14}$	$\mathfrak{a}_{15}$	$\mathfrak{a}_{16}$	$\chi(1)$	
$\mu_1$	1	5	5	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	$1_1$
$\mu_5$	1	5	5	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$5_1$
$\mu_4$	1	-1	-1	1	-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	-1	$5_2$
$\mu_2$	2	$A$	$B$	0	$-A$	2	$A$	$-B$	$-B$	2	$C$	$B$	$D$	$D$	$-A$	$C$		$8_1$
$\mu_3$	2	$B$	$A$	0	$-B$	2	$B$	$-A$	$-A$	2	$D$	$A$	$C$	$C$	$-B$	$D$		$8_2$
$\mu_7$	1	-1	-1	1	1	-3	-1	1	1	-3	1	1	1	1	1	1	1	9
$\mu_6$	2	0	0	-2	-2	0	0	-2	-2	0	0	0	2	2	-2	2		10

$$A = 2 * E(5) + 2 * E(5)^4$$

$$B = 2 * E(5)^2 + 2 * E(5)^3$$

$$C = E(5) + 2 * E(5)^2 + 2 * E(5)^3 + E(5)^4$$

$$D = 2 * E(5) + E(5)^2 + E(5)^3 + 2 * E(5)^4$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) :$$

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	1	$1_1$
$\mu_2$	1	-1	$1_2$

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_6$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	5	10	5	5	10	1
$\mu_2$	1	5	-2	-1	-1	-2	$5_1$
$\mu_3$	1	-1	-2	-1	5	-2	$5_2$
$\mu_4$	1	-1	$A$	2	-1	$B$	$8_1$
$\mu_5$	1	-1	$B$	2	-1	$A$	$8_2$
$\mu_6$	1	-1	2	-3	-1	2	9

$$A = E(5) + 2 * E(5)^2 + 2 * E(5)^3 - E(5)^4$$

$$B = 2 * E(5) - E(5)^2 - E(5)^3 + 2 * E(5)^4$$


---

$$p = 5, G = A_6, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$k_P^G$	1	$5_1$	$5_2$	$10^2$	25	16
1	1				1	
$5_1$		1				
$5_2$			1			
10				1		
8					3	2
soc	1	$5_1$	$5_2$	10	8	8
hd	1	$5_1$	$5_2$	10	8	8

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2^2$	5	4
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			1			
2				1		
$1_4$					3	2
$1_5$					2	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>5_1</math></b>	<b><math>5_2</math></b>	<b>10</b>	25	<b>16</b>
$5^x$	$5^0$	5	5	5	$5^2$	$5^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	2	$1_4$	$1_4$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	2	$1_4$	$1_5$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten von  $\mathfrak{E}^k$  zeigt, dass alle Sockel einfach sind. Allerdings haben die PIMs 4 und 5 isomorphe Sockel, so dass wir ausschließen können, dass der Ring quasi-Frobenius und damit symmetrisch ist (obwohl man allein mit Hilfe der Cartan-Matrix nicht hätte ausschließen können, dass er symmetrisch ist).

$D_P^G$	<b>1</b>	<b><math>5_1</math></b>	<b><math>5_2</math></b>	<b>10</b>	25	<b>16</b>
1	1					
$5_1$		1				
$5_2$			1			
10				1		
$8_1$					1	1
$8_2$					1	1
9					1	
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	2	$1_4$	$1_5$

$IT = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$

**Bemerkung:** Nur der unzerlegbare direkte Summand 25 von  $k_P^G$  ist kein Gewicht-Green-Korrespondent. Die zu 25 und 16 korrespondierenden PIMs von  $\mathfrak{E}^k$  haben isomorphe Sockel, wobei 25 von einer höheren 5-Potenz geteilt wird als 16. Insgesamt werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Die unzerlegbaren direkten Summanden  $5_1$ ,  $5_2$  und 10 von  $k_P^G$  sind projektiv einfach. Schließlich sind 16 und 1 weitere Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln und haben jeweils  $P$  als Vertex. Für die Induktionen dieser Gewichtsmoduln nach  $G$  ergibt sich:

$${}^1S_N^G = \mathbf{16} \oplus 10^2,$$

$${}^2S_N^G = \mathbf{1} \oplus 5_1 \oplus 5_2 \oplus 25.$$

Insbesondere ist 25 ein projektiver  $kG$ -Modul.

Für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und seinen Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$  gilt:

$k_N^G$	$5_1$	$5_2$	$1$	$25$
$5_1$	1			
$5_2$		1		
$1$			1	1
$8$				3

$C_N^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$3$
$1_1$	1			
$1_2$		1		
$1_3$			1	
$1_4$				3

$D_N^G$	$5_1$	$5_2$	$1$	$25$	$IT = [1^4]$
$5_1$	1				
$5_2$		1			
$1$			1		
$8_1$				1	
$8_2$				1	
$9$				1	

---



---

### 5.6.4 $G = S_6$

$$G = S_6, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}) = 5$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	5 <sub>1</sub>	5 <sub>2</sub>	9	16
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2	1 <sub>4</sub>

Charaktertafel:

End $_{KG}(K_P^G)$ :	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	2	8	16	2	4	4	8	1
$\mu_2$	1	2	2	4	-1	-2	-2	-4	5 <sub>2</sub>
$\mu_3$	1	-1	-4	4	2	-2	-2	2	5 <sub>1</sub>
$\mu_4$	2	1	2	-8	1	0	0	2	9
$\mu_5$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	16

$$p = 2, G = S_6, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$k_P^G$	16	1	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>
16	1				1 <sub>1</sub>	1			
1		1	2	2	1 <sub>2</sub>		1		
4 <sub>1</sub>			2	1	1 <sub>3</sub>			2	1
4 <sub>2</sub>			1	2	1 <sub>4</sub>			1	2
soc	16	1	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	$k_P^G$	<b>1</b>	<b>16</b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>
hd	16	1	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	$2^x$	2 <sup>0</sup>	2 <sup>4</sup>	2	2
					soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
					hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>

**Bemerkung:** Wegen  $S_6 \cong \mathrm{Sp}_4(2)$  ist  $S_6$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik, so dass nach Satz 3.4.8 der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius ist.

Die Berechnungen haben ergeben, dass die unzerlegbaren direkten Summanden  $14_1$  und  $14_2$  von  $k_P^G$  uniseriell sind.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>16</b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>	
1	1				1 <sub>1</sub>
16		1			1 <sub>4</sub>
5 <sub>1</sub>			1		1 <sub>2</sub>
5 <sub>2</sub>				1	1 <sub>3</sub>
9			1	1	2
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	

$IT = [1, 1, 1, 1]$

**Bemerkung:** Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Für die Induktion der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt: Die beiden direkten Summanden  $14_1$  und  $14_2$  haben jeweils einen Vertex  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  der Ordnung 8, die aber nicht konjugiert sind. Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{14}_1 \oplus 16, \\ {}^2S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{14}_2 \oplus 16. \end{aligned}$$

Dabei ist der vorkommende Modul der Dimension 16 isomorph zum projektiv einfachen, der auch in der Zerlegung von  $k_P^G$  vorkommt. Für den trivialen Modul gilt:

$${}^1S_{N(P)}^G = \mathbf{1} \oplus 14_1 \oplus 14_2 \oplus 16,$$

wobei dies wegen  $N(P) = P$  genau die Zerlegung von  $k_P^G$  ist. Weil alle PIMs des Endomorphismenrings einelementige Äquivalenzklassen bilden, bestätigen sich die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 an diesem Beispiel.

$G = S_6, P \in \mathrm{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 10$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 5$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 2$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{cccccccccccc} 1_1 & 1_2 & 5_1 & 5_2 & 5_3 & 5_4 & 9_1 & 9_2 & 10_1 & 10_2 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7 & 1_8 & 2_1 & 2_2 \end{array} \right.$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{ccccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \end{array} \right.$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{cc} 1 & 9 \\ \hline 1_1 & 1_2 \end{array} \right.$$

Charaktertafeln:

$\text{End}_{KG}(K_P^G) :$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\mathbf{a}_9$	$\mathbf{a}_{10}$	$\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{12}$	$\mathbf{a}_{13}$	$\mathbf{a}_{14}$	$\mathbf{a}_{15}$	$\mathbf{a}_{16}$	$\chi(1)$	
$\mu_1$	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9	1	1	1	1	1	1 <sub>1</sub>
$\mu_2$	1	-1	-1	1	-9	9	9	-9	9	-9	-9	9	-1	1	1	-1	-1	1 <sub>2</sub>
$\mu_3$	1	-1	-1	1	-3	3	3	-3	-3	3	3	-3	1	-1	-1	1	1	5 <sub>1</sub>
$\mu_4$	1	-1	-1	1	3	-3	-3	3	3	-3	-3	3	1	-1	-1	1	1	5 <sub>2</sub>
$\mu_5$	1	1	1	1	-3	-3	-3	-3	3	3	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	5 <sub>3</sub>
$\mu_6$	1	1	1	1	3	3	3	3	-3	-3	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-1	5 <sub>4</sub>
$\mu_7$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	9 <sub>1</sub>
$\mu_8$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	9 <sub>2</sub>
$\mu_9$	2	0	0	-2	-6	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10 <sub>1</sub>
$\mu_{10}$	2	0	0	-2	6	0	0	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10 <sub>2</sub>

$\text{End}_{KN}(K_P^N) :$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1 <sub>1</sub>
$\mu_2$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1 <sub>2</sub>
$\mu_3$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1 <sub>3</sub>
$\mu_4$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1 <sub>4</sub>
$\mu_5$	2	0	0	-2	0	0	0	0	2

$\text{End}_{KG}(K_N^G) :$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	
$\mu_1$	1	9	$1_1$
$\mu_2$	1	-1	$1_2$

$$p = 3, G = S_6, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

**Beachte:** Die 3-Sylowgruppe ist abelsch vom Isomorphietyp  $C_3 \times C_3$ .

$k_P^G$	$9_1$	$9_2$	$1_1$	$1_2$	$10_1$	$10_2$	$20^2$
$9_1$	1						
$9_2$		1					
$1_1$			1		1	1	
$1_2$				1	1	1	
$4_1$					2		1
$4_2$						2	1
6							2
soc	$9_1$	$9_2$	$1_1$	$1_2$	$4_1$	$4_2$	6
hd	$9_1$	$9_2$	$1_1$	$1_2$	$4_1$	$4_2$	6

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1$	$2_2$	$4^2$
$1_1$	1						
$1_2$		1					
$1_3$			1				
$1_4$				1			
$1_5$					2		
$1_6$						2	
2							2
$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$9_1$	$9_2$	$10_1$	$10_2$	$20$
$3^x$	$3^0$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^0$	$3^0$	$3^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	2
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	2

**Bemerkung:** Alle Sockel der PIMs des Endomorphismenrings sind einfach und paarweise nicht isomorph. Die Cartan-Matrix zeigt, dass  $\mathfrak{E}^k$  zu einer direkten Summe von vier Kopien von  $k$  und drei Kopien von  $k[X]/(X^2)$  und somit zu einer Gruppen-Algebra Morita-äquivalent ist. Insbesondere ist  $\mathfrak{E}^k$  symmetrisch und folglich quasi-Frobenius.

$D_P^G$	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{1}_2$	$\mathbf{9}_1$	$\mathbf{9}_2$	$\mathbf{10}_1$	$\mathbf{10}_2$	$\mathbf{20}$	
$\mathbf{1}_1$	1							$\mathbf{1}_1$
$\mathbf{1}_2$		1						$\mathbf{1}_2$
$\mathbf{9}_1$			1					$\mathbf{1}_7$
$\mathbf{9}_2$				1				$\mathbf{1}_8$
$\mathbf{5}_1$					1			$\mathbf{1}_3$
$\mathbf{5}_2$					1			$\mathbf{1}_4$
$\mathbf{5}_3$						1		$\mathbf{1}_5$
$\mathbf{5}_4$						1		$\mathbf{1}_6$
$\mathbf{10}_1$							1	$\mathbf{2}_1$
$\mathbf{10}_2$							1	$\mathbf{2}_2$
	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{1}_2$	$\mathbf{1}_3$	$\mathbf{1}_4$	$\mathbf{1}_5$	$\mathbf{1}_6$	$\mathbf{2}$	

$IT = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$

**Bemerkung:** Alle direkten Summanden von  $k_P^G$ , bis auf die projektiv einfachen  $\mathbf{9}_1$  und  $\mathbf{9}_2$ , gehören zum Hauptblock und haben Vertizes der Ordnung 9, also die 3-Sylowgruppen. Außerdem sind alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln, womit sich die Vermutung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned}
 {}^1S_N^G &= \mathbf{1}_1 \oplus \mathbf{9}_1, \\
 {}^2S_N^G &= \mathbf{1}_2 \oplus \mathbf{9}_2, \\
 {}^3S_N^G &= \mathbf{10}_1, \\
 {}^4S_N^G &= \mathbf{10}_2, \\
 {}^5S_N^G &= \mathbf{20}.
 \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den zugehörigen Endomorphismenring  $\text{End}_{k^G}(k_N^G)$ :

$k_N^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{9}$	$C_N^G$	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{1}_2$	$D_N^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{9}$	$IT = [1, 1]$
$\mathbf{1}$	1		$\mathbf{1}_1$	1		$\mathbf{1}$	1		
$\mathbf{9}$		1	$\mathbf{1}_2$		1	$\mathbf{1}$		1	

$$G = S_6, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 11$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 5$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim \mid 1_1 \ 1_2 \ 5_1 \ 5_2 \ 5_3 \ 5_4 \ 9_1 \ 9_2 \ 10_1 \ 10_2 \ 16}{\text{VFH} \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4 \ 1_5 \ 1_7 \ 1_8 \ 1_9 \ 2_1 \ 2_2 \ 4}$$

$$1_P^N : \frac{\dim \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4}{\text{VFH} \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4}$$

$$1_N^G : \frac{\dim \mid 1 \ 5_1 \ 5_2 \ 9 \ 16}{\text{VFH} \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4 \ 1_5}$$

Charaktertafeln:

 $\text{End}_{KG}(K_P^G)$  :

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{a}_7$	$\mathfrak{a}_8$	$\mathfrak{a}_9$	$\mathfrak{a}_{10}$	$\mathfrak{a}_{11}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	5	5	5	5	1	1	1	5	5	5	$1_1$
$\mu_2$	1	-5	5	-5	5	-1	-1	1	-5	5	5	$1_2$
$\mu_3$	1	-5	5	-5	5	-1	-1	1	1	-1	-1	$5_1$
$\mu_4$	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	5	$5_2$
$\mu_5$	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-3	1	-1	$5_3$
$\mu_6$	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	3	1	-1	$5_4$
$\mu_7$	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	5	$9_1$
$\mu_8$	1	5	5	5	5	1	1	1	-1	-1	-1	$9_2$
$\mu_9$	2	0	0	0	0	0	0	-2	-6	-2	0	$10_1$
$\mu_{10}$	2	0	0	0	0	0	0	-2	6	-2	0	$10_2$
$\mu_{11}$	4	0	-2	0	-2	0	0	0	0	2	-2	16

	$\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_{13}$	$\mathfrak{a}_{14}$	$\mathfrak{a}_{15}$	$\mathfrak{a}_{16}$	$\mathfrak{a}_{17}$	$\mathfrak{a}_{18}$	$\mathfrak{a}_{19}$	$\mathfrak{a}_{20}$	$\mathfrak{a}_{21}$	$\mathfrak{a}_{22}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	$1_1$
$\mu_2$	-5	-5	5	5	-5	-5	5	5	-5	-5	5	$1_2$
$\mu_3$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	$5_1$
$\mu_4$	-1	-1	-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$5_2$
$\mu_4$	1	1	1	1	-1	1	1	-3	1	1	-3	$5_3$
$\mu_6$	-1	-1	1	1	1	-1	1	-3	-1	-1	-3	$5_4$
$\mu_7$	1	1	-1	-1	-5	1	-1	-1	1	1	-1	$9_1$
$\mu_8$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$9_2$
$\mu_9$	0	0	-2	-2	0	0	2	0	0	0	0	$10_1$
$\mu_{10}$	0	0	-2	-2	0	0	2	0	0	0	0	$10_2$
$\mu_{11}$	0	0	2	2	0	0	-3	4	0	0	4	16

	$\mathfrak{a}_{23}$	$\mathfrak{a}_{24}$	$\mathfrak{a}_{25}$	$\mathfrak{a}_{26}$	$\mathfrak{a}_{27}$	$\mathfrak{a}_{28}$	$\mathfrak{a}_{29}$	$\mathfrak{a}_{30}$	$\mathfrak{a}_{31}$	$\mathfrak{a}_{32}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	$1_1$
$\mu_2$	5	-5	-5	5	5	-5	-5	5	5	-5	$1_2$
$\mu_3$	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$5_1$
$\mu_4$	-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	5	-1	-1	$5_2$
$\mu_5$	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-3	$5_3$
$\mu_6$	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	3	$5_4$
$\mu_7$	-1	1	-5	-1	-1	1	1	5	-1	1	$9_1$
$\mu_8$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$9_2$
$\mu_9$	-2	0	0	2	2	0	0	0	2	6	$10_1$
$\mu_{10}$	-2	0	0	2	2	0	0	0	2	-6	$10_2$
$\mu_{11}$	2	0	0	-3	-3	0	0	-2	-3	0	16

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\chi(1)$	
$\text{End}_{KN}(K_P^N) :$	$\mu_1$	1	1	1	1	$1_1$
	$\mu_2$	1	-1	-1	1	$1_2$
	$\mu_3$	1	$-E(4)$	$E(4)$	-1	$1_3$
	$\mu_4$	1	$E(4)$	$-E(4)$	-1	$1_4$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\chi(1)$	
$\text{End}_{KG}(K_N^G) :$	$\mu_1$	1	5	5	20	5	1
	$\mu_2$	1	-1	-3	4	-1	9
	$\mu_3$	1	-1	-1	-4	5	$5_1$
	$\mu_4$	1	-1	2	-1	-1	16
	$\mu_5$	1	5	-1	-4	-1	$5_2$

$p = 5, G = S_6, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$k_P^G$	$5_1$	$5_2$	$5_3$	$5_4$	$10_1^2$	$10_2^2$	$1_1$	$1_2$	$16_1$	$16_2$	$25_1$	$25_2$
$5_1$	1											
$5_2$		1										
$5_3$			1									
$5_4$				1								
$10_1$					1							
$10_2$						1						
$1_1$							1				1	
$1_2$								1				1
$8_1$									1	1	2	1
$8_2$									1	1	1	2
soc	$5_1$	$5_2$	$5_3$	$5_4$	$10_1$	$10_2$	$1_1$	$1_2$	$8_1$	$8_2$	$8_1$	$8_2$
hd	$5_1$	$5_2$	$5_3$	$5_4$	$10_1$	$10_2$	$1_1$	$1_2$	$8_2$	$8_1$	$8_1$	$8_2$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1^2$	$2_2^2$	$1_5$	$1_6$	$4_1$	$4_2$	$5_1$	$5_2$
$1_1$	1											
$1_2$		1										
$1_3$			1									
$1_4$				1								
$2_1$					1							
$2_2$						1						
$1_5$							1					
$1_6$								1				
$1_7$									1	1	1	1
$1_8$									1	1	1	1
$1_9$									1	1	2	1
$1_{10}$									1	1	1	2
$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$5_3$	$5_4$	$10_1$	$10_2$	$16_1$	$16_2$	$25_1$	$25_2$
$5^x$	$5^0$	$5^0$	5	5	5	5	5	5	$5^0$	$5^0$	$5^2$	$5^2$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1$	$2_2$	$1_5$	$1_6$	$1_9$	$1_{10}$	$1_9$	$1_{10}$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1$	$2_2$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockel des Endomorphismenrings zeigt, dass dieser nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	$1_1$	$1_2$	$5_1$	$5_2$	$5_3$	$5_4$	$10_1$	$10_2$	$16_1$	$16_2$	$25_1$	$25_2$
$1_1$	1											
$1_2$		1										
$5_1$			1									
$5_2$				1								
$5_3$					1							
$5_4$						1						
$10_1$							1					
$10_2$								1				
$9_1$											1	
$9_2$												1
$16$									1	1	1	1
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$2_1$	$2_2$	$1_7$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$

$$IT = [1^{12}]$$

**Bemerkung:** Zunächst bemerken wir, dass der  $KG$ -Modul der Dimension 16 in Charakteristik  $p$  der Konstituent der unzerlegbaren direkten Summanden  $16_1$  und  $16_2$  von  $k_P^G$  ist, die nicht isomorph sind.

Es gibt vier unzerlegbare direkte Summanden von  $k_P^G$ , die nicht projektiv einfach sind. Sie liegen im Hauptblock von  $G$  und bilden die Äquivalenzklassen  $\{16_1, 25_1\}$

und  $\{16_2, 25_2\}$  unter der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Äquivalenzrelation auf der Menge der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ . Jede dieser Äquivalenzklassen korrespondiert in  $\mathfrak{E}^k$  zu Äquivalenzklassen von PIMs, mit jeweils nur einem Sockelkonstituenten. Damit werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Alle nicht projektiv einfachen Gewichte haben einen Vertex der Ordnung 5, nämlich eine 5-Sylowgruppe. Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{16}_1 \oplus 10_1 \oplus 10_2, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{1}_1 \oplus 5_1 \oplus 5_2 \oplus 25_1, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{16}_2 \oplus 10_1 \oplus 10_2, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{1}_2 \oplus 5_3 \oplus 5_4 \oplus 25_2. \end{aligned}$$

Damit sind  $25_1$  und  $25_2$  projektiv.

Für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$  gilt:

$k_N^G$	1	$5_1$	$5_2$	25	$C_N^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	2	$D_N^G$	1	$5_1$	$5_2$	25
$1_1$	1				$1_1$	1				$1_1$	1			
$5_1$		1			$1_2$		1			$5_1$		1		
$5_2$			1		$1_3$			1		$5_2$			1	
$8_2$				2	$1_4$				2	9				1
$1_2$				1						16				1
$8_1$				1										

$$IT = [1^4]$$


---



---

**5.6.5**  $G = A_7$ 

$$\boxed{G = A_7, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 7 \text{ f\"ur } \text{char}(F) \neq 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 8 \text{ f\"ur } \text{char}(F) = 3$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	6	$14_1$	$14_2$	15	21	35
VFH	$1_1$	2	$3_1$	$3_2$	$1_2$	$3_3$	4

Charaktertafel:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\mathbf{a}_9$	$\mathbf{a}_{10}$	$\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{12}$	$\mathbf{a}_{13}$	$\mathbf{a}_{14}$	$\mathbf{a}_{15}$	$\mathbf{a}_{16}$	$\mathbf{a}_{17}$	$\mathbf{a}_{18}$	$\mathbf{a}_{19}$	$\mathbf{a}_{20}$	$\mathbf{a}_{21}$	$\mathbf{a}_{22}$	$\mathbf{a}_{23}$	$\mathbf{a}_{24}$	$\mathbf{a}_{25}$	$\chi(1)$	
$\mu_1$	1	2	8	8	8	2	4	4	8	8	8	8	8	4	8	4	8	4	2	2	2	8	8	8	8	8	1
$\mu_2$	1	2	2	2	2	-1	-2	-2	-4	1	1	1	2	1	2	1	2	1	-1	-1	-1	-3	-3	-3	0	15	
$\mu_3$	2	4	10	10	10	1	2	2	4	2	2	2	-4	-2	-4	-2	-4	-2	1	1	1	-2	-2	-2	-6	6	
$\mu_4$	3	3	4	-2	-2	0	-2	-2	-2	-5	-5	1	-2	1	0	-1	0	-1	3	0	0	7	1	1	4	14 <sub>1</sub>	
$\mu_5$	3	0	-2	-2	-2	3	-2	-2	4	-2	-2	-2	4	-2	0	2	0	2	0	3	3	-2	-2	-2	-2	14 <sub>2</sub>	
$\mu_6$	3	-3	-6	3	3	0	0	0	0	3	3	-6	-2	2	1	-1	1	-1	0	0	0	4	-2	-2	0	21	
$\mu_7$	4	-1	0	-3	-3	-1	2	2	0	0	0	3	0	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-3	3	3	0	35	

	$\mathbf{a}_{26}$	$\mathbf{a}_{27}$	$\mathbf{a}_{28}$	$\mathbf{a}_{29}$	$\mathbf{a}_{30}$	$\mathbf{a}_{31}$	$\mathbf{a}_{32}$	$\mathbf{a}_{33}$	$\mathbf{a}_{34}$	$\mathbf{a}_{35}$	$\mathbf{a}_{36}$	$\mathbf{a}_{37}$	$\mathbf{a}_{38}$	$\mathbf{a}_{39}$	$\mathbf{a}_{40}$	$\mathbf{a}_{41}$	$\mathbf{a}_{42}$	$\mathbf{a}_{43}$	$\mathbf{a}_{44}$	$\mathbf{a}_{45}$	$\mathbf{a}_{46}$	$\mathbf{a}_{47}$	$\mathbf{a}_{48}$	$\mathbf{a}_{49}$	$\chi(1)$	
$\mu_1$	8	8	4	8	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	4	1
$\mu_2$	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-2	-1	15
$\mu_3$	-6	-6	-3	-6	-2	-2	-2	-4	-4	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	6	3	6
$\mu_4$	4	4	2	4	1	-1	-1	-2	0	0	1	-3	-3	-3	-1	-1	-3	-1	-1	-5	-5	1	4	5	14 <sub>1</sub>	
$\mu_5$	-2	-2	-1	-2	-2	2	2	4	0	0	4	0	0	0	8	-4	0	8	-4	-2	-2	-2	-2	-1	14 <sub>2</sub>	
$\mu_6$	0	0	0	0	2	-1	-1	-2	1	1	2	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1	2	3	3	-6	-2	2	21	
$\mu_7$	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	-3	2	2	2	-2	1	2	-2	1	0	0	3	0	-3	35	

$$p = 2, G = A_7, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	6	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	20	14 <sub>3</sub>	56 <sup>2</sup>	64	70
1	1						2	2	2
4 <sub>1</sub>			1	1	1				
4 <sub>2</sub>			1	1	1				
6		1	1	1	2				
14						1	1	3	2
20							2	1	2
soc	1	6	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	6	14	20	14	14 ⊕ 20
hd	1	6	4 <sub>2</sub>	4 <sub>1</sub>	6	14	20	14	14 ⊕ 20

$C_P^G$	1	2	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	5	3 <sub>3</sub>	7 <sup>2</sup>	8	10
1 <sub>1</sub>	1								
1 <sub>2</sub>		1			1				
1 <sub>3</sub>			1	1	1				
1 <sub>4</sub>			1	1	1				
1 <sub>5</sub>		1	1	1	2				
1 <sub>6</sub>						1		1	1
2							2	1	2
1 <sub>7</sub>						1	1	3	2
1 <sub>8</sub>						1	2	2	3
$k_P^G$	1	6	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	20	14 <sub>3</sub>	56	64	70
2 <sup>x</sup>	2 <sup>0</sup>	2	2	2	2 <sup>2</sup>	2	2 <sup>3</sup>	2 <sup>6</sup>	2
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>7</sub>	2	1 <sub>7</sub>	1 <sub>7</sub> ⊕ 2
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>6</sub>	2	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	1	6	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	20	14 <sub>3</sub>	56	64	70	
1	1									1 <sub>1</sub>
6		1			1					2
14 <sub>1</sub>			1	1	1					3 <sub>1</sub>
14 <sub>2</sub>						1		1	1	3 <sub>2</sub>
15								1		1 <sub>2</sub>
21							1		1	3 <sub>3</sub>
35							1	1	1	4
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	2	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>	

$IT = [1^6, 0]$

**Bemerkung:**  $14_1, 14_2$  haben in  $\text{char}(K) = 0$  den gleichen gewöhnlichen Charakter. Die unzerlegbaren direkten Summanden  $1, 14_2, 15, 21$  und  $35$  liegen zudem im Hauptblock.

Die PIMs  $2$  und  $5$  des Endomorphismenrings haben jeweils den gleichen Sockel (bis auf Isomorphie), bilden also eine zweielementige Äquivalenzklasse, die nur einen Sockel-Konstituenten hervorbringt. Die korrespondierende Äquivalenzklasse auf der Menge der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  ist  $\{6, 20\}$ , wovon nur  $6$  ein Gewichts-Green-Korrespondent ist. Des Weiteren bilden die PIMs  $3_3, 7, 8, 10$  eine Äquivalenzklasse, die als vierelementige Menge nur zwei Sockel-Konstituenten liefert. Zu diesen PIMs korrespondieren die direkten Summanden  $14_3, 56, 64$  und  $70$  von  $k_P^G$ , von denen  $14_3$  und  $70$  Gewichts-Green-Korrespondenten sind.

Insgesamt werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Die unzerlegbaren direkten Summanden  $6, 14_1, 14_2$  und  $70$  haben jeweils einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung  $4$ . Für die Induktion der entsprechenden Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^2_1 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{70}, \\ {}^2_2 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{6} \oplus 64, \\ {}^2_3 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{14}_1 \oplus 56, \\ {}^2_4 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{14}_2 \oplus 56, \end{aligned}$$

wobei alle auftretenden Summanden isomorph zu solchen in  $k_P^G$  sind.

Der unzerlegbare direkte Summand  $14_3$  hat auch einen Vertex  $Q_2$  der Ordnung  $4$ , der aber nicht zu  $Q_1$  konjugiert ist. Es gilt

$${}^2 S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{14}_3 \oplus 20 \oplus 64 \oplus 56^2,$$

wobei alle auftretenden Summanden auch solche von  $k_P^G$  sind.

Wir bezeichnen einen Vertex von  $20$  mit  $Q_3$ . Da einerseits  $|A_7 : Q_3|_2 \in \{2^2, 2^3\}$  liegt, andererseits aber  $|20|_2 = 2^2$  ist, kann ein Vertex von  $20$  nur die Ordnung  $2$  haben. Insbesondere ist  $20$  nicht projektiv.

Wegen  $N_G(P) = P$  gilt für die Induktion vom trivialen Gewichtsmodul

$${}^1 S_{N(Q)}^G = k_P^G,$$

so dass es nur einen Gewichtsmodul mit Vertex  $P$  gibt.

$$\boxed{G = A_7, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 9$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 5$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccccccc} 1 & 6 & 10_1 & 10_2 & 14_1 & 14_2 & 15 & 21 & 35 \\ \hline 1_1 & 2_1 & 2_2 & 2_3 & 2_4 & 2_5 & 3_1 & 1_2 & 3_2 \end{array}$$

$$1_P^N : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array}$$

$$1_N^G : \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|ccccc} 1 & 6 & 14_1 & 14_2 & 35 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 \end{array}$$

Charaktertafeln:

 $\text{End}_{KG}(K_P^G)$ :

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{a}_7$	$\mathfrak{a}_8$	$\mathfrak{a}_9$	$\mathfrak{a}_{10}$	$\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_{13}$	$\mathfrak{a}_{14}$	$\mathfrak{a}_{15}$	$\mathfrak{a}_{16}$	$\mathfrak{a}_{17}$	$\mathfrak{a}_{18}$	$\mathfrak{a}_{19}$	$\mathfrak{a}_{20}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	1	9	9	9	9	1	1	9	9	9	9	9	9	3	3	3	3	9	9	1
$\mu_2$	1	1	-3	-3	3	3	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	21
$\mu_3$	2	2	12	12	6	6	0	0	3	3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	2	2	0	0	6
$\mu_4$	2	-2	0	0	0	0	0	0	-1	1	$-A$	$A$	$A$	$A$	$A$	$A$	2	-2	-4	4	$10_1$
$\mu_5$	2	-2	0	0	0	0	0	0	-1	1	$A$	$A$	$A$	$A$	$A$	$A$	2	-2	-4	4	$10_2$
$\mu_6$	2	2	2	2	-4	-4	0	0	-2	-2	-3	-3	-3	-3	2	2	2	2	0	0	$14_1$
$\mu_7$	2	2	-4	-4	2	2	0	0	-5	-5	3	3	3	3	-1	-1	2	2	0	0	$14_2$
$\mu_8$	3	-1	3	3	-3	-3	-1	-1	7	-5	2	2	2	2	1	1	1	-3	1	-5	15
$\mu_9$	3	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	3	0	0	0	0	-1	-1	-3	1	1	-1	35

	$\mathfrak{a}_{21}$	$\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_{23}$	$\mathfrak{a}_{24}$	$\mathfrak{a}_{25}$	$\mathfrak{a}_{26}$	$\mathfrak{a}_{27}$	$\mathfrak{a}_{28}$	$\mathfrak{a}_{29}$	$\mathfrak{a}_{30}$	$\mathfrak{a}_{31}$	$\mathfrak{a}_{32}$	$\mathfrak{a}_{33}$	$\mathfrak{a}_{34}$	$\mathfrak{a}_{35}$	$\mathfrak{a}_{36}$	$\mathfrak{a}_{37}$	$\mathfrak{a}_{38}$	$\mathfrak{a}_{39}$	$\mathfrak{a}_{40}$	$\chi(1)$	
$\mu_1$	9	9	9	9	3	3	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	3	3	1
$\mu_2$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	21
$\mu_3$	0	0	-6	-6	-3	-3	-6	-6	-3	-3	-3	-3	0	0	0	0	3	3	2	2	6	
$\mu_4$	-4	4	$-B$	$B$	$A$	$A$	$-B$	$B$	$A$	$A$	$A$	$A$	-4	4	4	-4	-1	1	-2	2	$10_1$	
$\mu_5$	-4	4	$B$	$-B$	$A$	$A$	$B$	$-B$	$A$	$A$	$A$	$A$	-4	4	4	-4	-1	1	-2	2	$10_2$	
$\mu_6$	0	0	4	4	2	2	4	4	-3	-3	-3	-3	0	0	0	0	-2	-2	2	2	$14_1$	
$\mu_7$	0	0	-2	-2	-1	-1	-2	-2	3	3	3	3	0	0	0	0	-5	-5	2	2	$14_2$	
$\mu_8$	1	-5	-1	-1	1	1	-1	-1	2	2	2	2	1	-5	-5	1	7	-5	-3	1	15	
$\mu_9$	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	0	0	0	0	1	-1	-1	1	-1	3	1	-3	35	

$$A = E(7) + E(7)^2 - E(7)^3 + E(7)^4 - E(7)^5 - E(7)^6$$

$$B = 2 * E(7) + 2 * E(7)^2 - 2 * E(7)^3 + 2 * E(7)^4 - 2 * E(7)^5 - 2 * E(7)^6$$

$$\text{End}_{KN}(K_P^N) :$$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	1	1	1	$1_1$
$\mu_2$	1	1	-1	-1	$1_2$
$\mu_3$	1	-1	$E(4)$	$-E(4)$	$1_3$
$\mu_3$	1	-1	$-E(4)$	$E(4)$	$1_4$

$$\text{End}_{KG}(K_N^G) :$$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	9	18	36	6	1
$\mu_2$	1	9	-3	-6	-1	6
$\mu_3$	1	-1	2	-6	4	$14_1$
$\mu_4$	1	-1	-7	6	1	$14_2$
$\mu_5$	1	-1	2	0	-2	35

$$p = 3, G = A_7, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	$15^2$	$10_1$	$10_2$	$6^2$	28	36	$45_1$	$45_2$	63
1	1					2		2	2	4
15		1					2			
$10_1$			1					2	1	1
$10_2$				1				1	2	1
13						2		1	1	3
6					1		1			
soc	1	15	$10_1$	$10_2$	6	13	15	$10_1$	$10_2$	13

$C_P^G$	1	$2_1^2$	$2_2$	$2_3$	$3^2$	$4_1$	$4_2$	$5_1$	$5_2$	7
$1_1$	1									
$2_1$		1								
$1_2$			1						1	
$1_3$				1				1		
$2_2$					1		1			
$1_4$						2				2
$1_5$					1		2			
$1_6$				1				2	1	1
$1_7$			1					1	2	1
$1_8$						2		1	1	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>6</b>	<b><math>10_1</math></b>	<b><math>10_2</math></b>	<b>15</b>	<b>28</b>	36	$45_1$	$45_2$	63
$3^x$	$3^0$	3	$3^0$	$3^0$	3	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^2$	$3^2$
soc	$1_1$	$2_1$	$1_7$	$1_6$	$1_5$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_4$
hd	$1_1$	$2_1$	$1_2$	$1_3$	$2_2$	$1_8$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_4$

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	1	6	10 <sub>1</sub>	10 <sub>2</sub>	15	28	36	45 <sub>1</sub>	45 <sub>2</sub>	63	
1	1										1 <sub>1</sub>
6		1									2 <sub>1</sub>
10 <sub>1</sub>			1						1		2 <sub>2</sub>
10 <sub>2</sub>				1				1			2 <sub>3</sub>
14 <sub>1</sub>						1				1	2 <sub>4</sub>
14 <sub>2</sub>						1				1	2 <sub>5</sub>
15					1		1				3 <sub>1</sub>
21							1				1 <sub>2</sub>
35								1	1	1	3 <sub>2</sub>
	1 <sub>1</sub>	2 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2 <sub>2</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>	

$IT = [1^9, 0]$

**Bemerkung:** Die Zerlegung des Permutationsmoduls bzw. des regulären Moduls ließ noch keine eindeutige Zerlegungsmatrix zu. Wir haben dann für die beiden Möglichkeiten jeweils  $D^{tr} * D$  mit  $C_P^G$  verglichen und so die richtige Zerlegungsmatrix gefunden.

Der direkte Summand 6 von  $k_P^G$  ist kein projektiv einfacher Modul, aber der korrespondierende PIM  $2_1$  in  $\mathfrak{E}^k$  ist einfach. Die Summanden 6, 15, 21 liegen in einem Block mit Defekt 1, die übrigen direkten Summanden liegen im Hauptblock.

Die Mengen  $\{2_2, 5_2\}$ ,  $\{2_3, 5_1\}$  und  $\{3, 4_2\}$  von PIMs bilden jeweils zweielementige Äquivalenzklassen, die jeweils einen Sockelkonstituenten hervorbringen. In jeder Äquivalenzklasse korrespondieren die PIMs zu unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ , von denen die Dimension des Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten durch eine höhere  $p$ -Potenz geteilt wird als des Gewichts-Green-Korrespondenten. Insgesamt bestätigen sich die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 auch in diesem Beispiel.

Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt: 6 und 15 haben einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung 3.

$$\begin{aligned} {}^{3_1}S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{6} \oplus \mathbf{36} \oplus \mathbf{63}, \\ {}^{3_2}S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{15} \oplus \mathbf{45_1} \oplus \mathbf{45_2}. \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass 36, 45<sub>1</sub>, 45<sub>2</sub> und 63 projektive unzerlegbare direkte Summanden von  $k_P^G$  sind. Die übrigen unzerlegbaren direkten Summanden haben  $P$  als

Vertex. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 6 \oplus 63, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{28} \oplus 6 \oplus 36, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{10_1} \oplus 15 \oplus 45_2, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{10_2} \oplus 15 \oplus 45_1. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$ :

$k_N^G$	6	1	63	$C_N^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	3	$D_N^G$	6	1	63	$IT = [1, 1, 1]$
6	1			1 <sub>1</sub>	1			6	1			
13			3	1 <sub>2</sub>		1		1		1		
10 <sub>1</sub>			1	1 <sub>3</sub>			3	14 <sub>1</sub>			1	
10 <sub>2</sub>			1					14 <sub>2</sub>			1	
1	1	4						35			1	

$$\boxed{G = A_7, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 9$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 4$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 6 \text{ für } \mathbf{char}(F) \neq 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 9 \text{ für } \mathbf{char}(F) = 3$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G: \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccccccccc} 1 & 6 & 10_1 & 10_2 & 14_1 & 14_2 & 15 & 21 & 35 \\ \hline 1_1 & 2_1 & 2_2 & 2_3 & 2_4 & 2_5 & 3 & 5 & 7 \end{array}$$

$$1_P^N: \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 \end{array}$$

$$1_N^G: \frac{\dim}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccccc} 1 & 6 & 14_1 & 14_2 & 21 & 35 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 2 \end{array}$$

Wegen der Größe der Charaktertafel verzichten wir hier auf ihre Wiedergabe.

$$p = 5, G = A_7, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

**Beachte:** Die 5-Sylowgruppe ist zyklisch.

$k_P^G$	1	$10_1^2$	$10_2^2$	$15^3$	$35_1^7$	6	20	$21_1$	$21_2$	$35_2$	$35_3^2$
1	1										1
$10_1$		1									
$10_2$			1								
15				1							
35					1						
6						1	2			1	
8							1	1	1	2	1
13								1	1	1	2
soc	1	$10_1$	$10_2$	15	35	6	6	13	8	8	13

$C_P^G$	1	$2_1^2$	$2_2^2$	$3^3$	$7_1^7$	$2_3$	4	$5_1$	$5_2$	$7_1$	$7_2^2$
$1_1$	1										
$2_1$		1									
$2_2$			1								
3				1							
7					1						
$1_2$						1	1				
$1_3$						1	2			1	
$1_4$								1	1	1	1
$1_5$								1	1	1	1
$1_6$							1	1	1	2	1
$2_3$								1	1	1	2
$k_P^G$	1	$10_1$	$10_2$	15	$35_1$	6	20	$21_1$	$21_2$	$35_2$	$35_3$
$5^x$	$5^0$	5	5	5	5	$5^0$	5	$5^0$	$5^0$	5	5
soc	$1_1$	$2_1$	$2_2$	3	7	$1_3$	$1_3$	$2_3$	$1_6$	$1_6$	$2_3$
hd	$1_1$	$2_1$	$2_2$	3	7	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$2_3$

**Bemerkung:** Die Isomorphietypen der Sockel zeigen, dass der Ring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	1	10 <sub>1</sub>	10 <sub>2</sub>	15	35 <sub>1</sub>	6	20	21 <sub>1</sub>	21 <sub>2</sub>	35 <sub>2</sub>	35 <sub>3</sub>	
1	1											1 <sub>1</sub>
10 <sub>1</sub>		1										2 <sub>2</sub>
10 <sub>2</sub>			1									2 <sub>3</sub>
15				1								3
35					1							7
14 <sub>1</sub>											1	2 <sub>4</sub>
6						1	1					2 <sub>1</sub>
14 <sub>2</sub>							1			1		2 <sub>5</sub>
21								1	1	1	1	5
	1 <sub>1</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	3	7	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	2 <sub>3</sub>	

$IT = [1^{11}]$

**Bemerkung:** Die unzerlegbaren Summanden  $10_1, 10_2, 15, 35_1$  von  $k_P^G$  sind projektiv einfache  $kG$ -Moduln. Alle übrigen liegen im Hauptblock. Wir finden in  $\mathfrak{E}^k$  die Paare  $(2_3, 4), (5_1, 7_2)$  und  $(5_2, 7_1)$  von PIMs, die jeweils eine Äquivalenzklasse mit nur einem Sockelkonstituenten bilden. Jeweils derjenige in  $k_P^G$  korrespondierende Partner, dessen Dimension von einer niedrigeren 5-Potenz geteilt wird, ist der Green-Korrespondent eines Gewichtsmoduls, der andere nicht. Insgesamt werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Alle Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln haben eine 5-Sylowgruppe als Vertex. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt jeweils:

$$\begin{aligned}
 {}^1S_N^G &= \mathbf{21}_1 \oplus 15 \oplus 35_1^2 \oplus 10_1 \oplus 10_2, \\
 {}^2S_N^G &= \mathbf{6} \oplus 15 \oplus 35_1 \oplus 35_2 \oplus 35_3, \\
 {}^3S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 20 \oplus 35_1^2 \oplus 35_3, \\
 {}^4S_N^G &= \mathbf{21}_2 \oplus 15 \oplus 35_1^2 \oplus 10_1 \oplus 10_2.
 \end{aligned}$$

Damit folgt, dass die unzerlegbaren Summanden  $20, 35_2$  und  $35_3$  projektive  $kG$ -Moduln sind.

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$ :

$k_N^G$	35 <sub>1</sub> <sup>2</sup>	1	20	35 <sub>2</sub>	$C_N^G$	2 <sub>1</sub> <sup>2</sup>	1	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>
35	1				2	1			
1		1		1	1 <sub>1</sub>		1		
6			2		1 <sub>2</sub>			2	
8			1	1	1 <sub>3</sub>				2
13				2					

---

$D_N^G$	$35_1$	$1$	$20$	$35_2$	
$35$	$1$				
$1$		$1$			
$6$			$1$		$IT = [1, 1, 1, 1]$
$14_2$			$1$		
$14_2$				$1$	
$21$				$1$	

---



---

$G = A_7, P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 8$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 7$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim \mid 1 \quad 10_1 \quad 10_2 \quad 14_1 \quad 14_2 \quad 15 \quad 21 \quad 35}{\text{VFH} \mid 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3 \quad 2_1 \quad 2_2 \quad 3_1 \quad 3_2 \quad 5}$$

$$1_P^N : \frac{\dim \mid 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3}{\text{VFH} \mid 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3}$$

$$1_N^G : \frac{\dim \mid 1 \quad 10_1 \quad 10_2 \quad 14 \quad 15 \quad 21 \quad 35}{\text{VFH} \mid 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3 \quad 2 \quad 1_4 \quad 1_5 \quad 1_6}$$


---

$$p = 7, G = A_7, P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	$14_1^2$	$14_2^2$	$21^3$	$35_1^5$	$15_1$	$15_2$	$35_2$
1	1							
$14_1$		1						
$14_2$			1					
21				1				
35					1			
5						1	1	1
10						1	1	3
soc	1	$14_1$	$14_2$	21	35	5	10	10
$C_P^G$	1	$2_1^2$	$2_2^2$	$3_1^3$	$5_1^5$	$3_2$	$3_3$	$5_2$
$1_1$	1							
$2_1$		1						
$2_2$			1					
3				1				
5					1			
$1_2$						1	1	1
$1_3$						1	1	1
$1_4$						1	1	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>14_1</math></b>	<b><math>14_2</math></b>	<b>21</b>	<b><math>35_1</math></b>	<b><math>15_1</math></b>	<b><math>15_2</math></b>	<b><math>35_2</math></b>
$7^x$	$7^0$	7	7	7	7	$7^0$	$7^0$	7
soc	$1_1$	$2_1$	$2_2$	3	5	$1_3$	$1_4$	$1_4$
hd	$1_1$	$2_1$	$2_2$	3	5	$1_2$	$1_3$	$1_4$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b><math>14_1</math></b>	<b><math>14_2</math></b>	<b>21</b>	<b><math>35_1</math></b>	<b><math>15_1</math></b>	<b><math>15_2</math></b>	<b><math>35_2</math></b>	
1	1								$1_1$
$14_1$		1							$2_1$
$14_2$			1						$2_2$
21				1					$3_2$
35					1				5
$10_1$								1	$1_2$
$10_2$								1	$1_3$
15						1	1	1	$3_1$
	$1_1$	$2_1$	$2_2$	3	5	$1_2$	$1_3$	$1_4$	

$IT = [1^7, 0]$

**Bemerkung:** Die unzerlegbaren direkten Summanden  $14_1, 14_2, 21$  und  $35$  sind projektiv einfache  $kG$ -Moduln. Die übrigen liegen im Hauptblock. Wir finden hier das Paar  $(3_3, 5_2)$  von PIMs in  $\mathfrak{E}^k$ , deren Sockel isomorphe Konstituenten haben. Der zu  $3_3$  korrespondierende  $kG$ -Modul hat die Dimension 15, die nicht von 7 geteilt wird, und ist ein Gewichts-Green-Korrespondent; der zu  $5_2$  korrespondierende  $kG$ -Modul  $35$  ist kein Gewichts-Green-Korrespondent. Damit werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Alle Green-Korrespondenten von Gewichtsmoduln, die nicht projektiv einfach sind, haben die 7-Sylowgruppen als Vertizes. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{15}_1 \oplus 14_1 \oplus 21 \oplus 35_1^2, \\ {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 14_2^2 \oplus 21 \oplus 35_1 \oplus 35_2, \\ {}^1_3 S_N^G &= \mathbf{15}_2 \oplus 14_1 \oplus 21 \oplus 35_1^2. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $35_2$  projektiv.

Für den Permutationsmodul  $k_N^P$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$  gilt schließlich:

$k_N^G$	$14^2$	$21$	$35_1$	$1$	$35_2$	$C_N^G$	$1_1$	$1_2$	$2$	$1_3$	$3$
14	1					1 <sub>1</sub>	1				
21		1				1 <sub>2</sub>		1			
35			1			2			1		
1				1		1 <sub>3</sub>				1	
10					3	1 <sub>4</sub>					3
5					1						

$D_N^G$	$14$	$21$	$35_1$	$1$	$35_2$	$IT = [1^5]$
14	1					
21		1				
35			1			
1				1		
10 <sub>1</sub>					1	
10 <sub>2</sub>					1	
15					1	

---



---

### 5.6.6 $G = S_7$

$$G = S_7, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}) = 10$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	6	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	14 <sub>3</sub>	15	21 <sub>1</sub>	21 <sub>2</sub>	35 <sub>1</sub>	35 <sub>2</sub>
VFH	1 <sub>1</sub>	2 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	1 <sub>3</sub>	2 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	3 <sub>2</sub>

$$p = 2, G = S_7, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	6	20	28	14	112	64	70
1	1					4	2	2
6		1	2	2				
8			1	2				
14				1	2	3	2	
20					4	1	2	
soc	1	6	6	8	14	20	14	14 ⊕ 20
hd	1	6	6	8	14	20	14	14 ⊕ 20

$C_P^G$	1	2	4	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	7 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	8
1 <sub>1</sub>	1							
1 <sub>2</sub>		1	1					
1 <sub>3</sub>		1	2	1				
1 <sub>4</sub>			1	2				
1 <sub>5</sub>					1		1	1
1 <sub>6</sub>						4	1	2
1 <sub>7</sub>					1	1	3	2
1 <sub>8</sub>					1	2	2	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>6</b>	20	<b>28</b>	<b>14</b>	112	64	<b>70</b>
$2^x$	2 <sup>0</sup>	2	2 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	2	2 <sup>4</sup>	2 <sup>6</sup>	2
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>3</sub> ⊕ 1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>6</sub> ⊕ 1 <sub>7</sub>	1 <sub>6</sub> ⊕ 1 <sub>7</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und folglich auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>6</b>	20	<b>28</b>	<b>14</b>	112	64	<b>70</b>	
1	1								$1_1$
6		1	1						$2_1$
$14_1$				1					$1_2$
$14_2$			1	1					$2_2$
$14_3$					1		1	1	3
15							1		$1_3$
$21_1$						1		1	$2_3$
$21_2$						1			$1_4$
$35_1$						1			$1_5$
$35_2$						1	1	1	$3_2$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	

$IT = [1^8]$

**Bemerkung:** Alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  liegen im Hauptblock. Die PIMs 2, 4,  $3_1$  bilden eine Äquivalenzklasse, die zwei Sockelkonstituenten hervorbringt, während die PIMs  $3_2$ ,  $7_1$ ,  $7_2$ , 8 eine vierelementige Äquivalenzklasse mit 3 Sockelkonstituenten bilden. Der Vergleich mit den direkten Summanden von  $k_P^G$ , die zu diesen PIMs korrespondieren, zeigt, dass sich die Vermutung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Allerdings sind hier nicht die Voraussetzungen der Beobachtung aus Abschnitt 5.3 erfüllt.

Der unzerlegbare direkte Summand der Dimension 28 hat einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung 4. Es gilt:

$${}^1S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{28} \oplus 112.$$

Die Gewichts-Green-Korrespondenten der Dimension 70, 14 und 6 haben einen Vertex der Ordnung 8. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{70} \oplus 28 \oplus 112, \\ {}^2S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{14} \oplus 20 \oplus 64 \oplus 112, \\ {}^2S_{N(Q_4)}^G &= \mathbf{6} \oplus 28 \oplus 64 \oplus 112. \end{aligned}$$

Für den trivialen Gewichtsmodul haben wir schließlich wegen  $N_G(P) = P$ :

$${}^1S_N^G = k_P^G.$$

Beachte, dass der unzerlegbare direkte Summand 20 von  $k_P^G$  einen Vertex der Ordnung  $2^2$  haben muss.

$$G = S_7, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 5$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 5$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G: \begin{array}{c|cccccccccccccccc} \dim & 1_1 & 1_2 & 6_1 & 6_2 & 14_1 & 14_2 & 14_3 & 14_4 & 15_1 & 15_2 & 20 & 21_1 & 21_2 & 35_1 & 35_2 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 2_1 & 2_2 & 2_3 & 2_4 & 2_5 & 2_6 & 3_1 & 3_2 & 4 & 1_3 & 1_4 & 3_3 & 3_4 \end{array}$$

$$1_P^N: \begin{array}{c|ccccc} \dim & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \end{array}$$

$$1_N^G: \begin{array}{c|ccccc} \dim & 1 & 6 & 14_1 & 14_2 & 35 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 \end{array}$$

**Beachte:** Der Endomorphismenring  $\text{End}_{KN}(K_P^N)$  ist kommutativ.

$$p = 3, G = S_7, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

**Beachte:** Die 3-Sylowgruppe ist abelsch vom Isomorphietyp  $C_3 \times C_3$ .

$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$6_1^2$	$6_2^2$	$15_1^2$	$15_2^2$	$36_1$	$36_2$	$28_1$	$28_2$	$20^2$	$63_1$	$63_2$	$90^2$
$1_1$	1								1	1		2	2	2
$1_2$		1							1	1		2	2	2
$6_1$			1				1							
$6_2$				1				1						
$15_1$					1		2							
$15_2$						1		2						
$13_1$									2			3		1
$13_2$										2			3	1
$20$											1	1	1	3
soc	$1_1$	$1_2$	$6_1$	$6_2$	$15_1$	$15_2$	$15_1$	$15_2$	$13_1$	$13_2$	$20$	$13_1$	$13_2$	$20$
hd	$1_1$	$1_2$	$6_1$	$6_2$	$15_1$	$15_2$	$15_1$	$15_2$	$13_1$	$13_2$	$20$	$13_1$	$13_2$	$20$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1^2$	$2_2^2$	$3_1^2$	$3_2^2$	$4_1$	$4_2$	$4_3$	$4_4$	$4_5^2$	$7_1$	$7_2$	$10^2$
$1_1$	1													
$1_2$		1												
$2_1$			1											
$2_2$				1										
$2_3$					1		1							
$2_4$						1		1						
$1_3$					1		2							
$1_4$						1		2						
$1_5$									2			2		
$1_6$										2			2	
$2_5$											1			1
$1_7$									2			3		1
$1_8$										2			3	1
$2_6$											1	1	1	3
$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$6_1$	$6_2$	$15_1$	$15_2$	$36_1$	$36_2$	$28_1$	$28_2$	$20$	$63_1$	$63_2$	$90$
$3^x$	$3^0$	$3^0$	3	3	3	3	$3^2$	$3^2$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^2$
soc	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$1_3$	$1_4$	$1_3$	$1_4$	$1_7$	$1_8$	$2_6$	$1_8$	$1_7$	$2_6$
hd	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$2_5$	$1_7$	$1_8$	$2_6$

**Bemerkung:** Der Endomorphismenring ist nicht quasi-Frobenius, wie die Sokkel der einzelnen PIMs zeigen. Insbesondere ist er nicht symmetrisch.

$D_P^G$	$1_1$	$1_2$	$6_1$	$6_2$	$15_1$	$15_2$	$36_1$	$36_2$	$28_1$	$28_2$	$20$	$63_1$	$63_2$	$90$
$1_1$	1													$1_1$
$1_2$		1												$1_2$
$6_1$			1											$2_1$
$6_2$				1										$2_2$
$15_1$					1		1							$3_1$
$15_2$						1		1						$3_2$
$21_1$							1							$1_3$
$21_2$								1						$1_4$
$14_1$									1			1		$2_4$
$14_2$									1			1		$2_5$
$14_3$										1			1	$2_3$
$14_4$										1			1	$2_6$
$20$											1			4
$35_1$												1		$3_3$
$35_2$													1	$3_4$
	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$2_5$	$1_7$	$1_8$	$2_6$

$$IT = [1^{13}, 0]$$

**Bemerkung:** Die PIMs  $1_i$  und  $2_i$  sind projektiv einfache Moduln, obwohl die korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden  $1_i, 6_i$  zwar einfach, aber nicht projektiv sind.

Die Paare von PIMs  $(3_1, 4_1)$ ,  $(3_2, 4_2)$ ,  $(4_3, 7_1)$  und  $(4_4, 7_2)$  bilden jeweils Äquivalenzklassen mit einem Sockelkonstituenten. Jeweils ein Partner korrespondiert in  $k_P^G$  zum Green-Korrespondenten eines Gewichtsmoduls, der andere nicht. Dabei ist der Gewicht-Green-Korrespondent derjenige der beiden Partner, dessen Dimension von einer niedrigeren 3-Potenz geteilt wird. Damit wird die Vermutung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Die unzerlegbaren direkten Summanden  $15_1, 15_2, 6_1, 6_2$  von  $k_P^G$  haben einen Vertex  $Q$  der Ordnung 3. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^3_1 S_{N(Q)}^G &= \mathbf{15}_1 \oplus 90, \\ {}^3_2 S_{N(Q)}^G &= \mathbf{6}_1 \oplus 36_2 \oplus 63_1, \\ {}^3_3 S_{N(Q)}^G &= \mathbf{6}_2 \oplus 36_2 \oplus 63_2, \\ {}^3_4 S_{N(Q)}^G &= \mathbf{15}_2 \oplus 90. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die unzerlegbaren direkten Summanden  $36_1, 36_2, 63_1, 63_2$  und  $90$  von  $k_P^G$  projektiv. Die übrigen unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  haben  $P$  als Vertex. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{1}_1 \oplus 6_1 \oplus 63_1, \\ {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{28}_1 \oplus 6_1 \oplus 36_1, \\ {}^1_3 S_N^G &= \mathbf{28}_2 \oplus 6_2 \oplus 36_2, \\ {}^1_4 S_N^G &= \mathbf{1}_2 \oplus 6_2 \oplus 63_2, \\ {}^2 S_N^G &= \mathbf{20} \oplus 15_1 \oplus 15_2 \oplus 90. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{k^G}(k_N^G)$ :

$k_N^G$	6	1	63	$C_N^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	3	$D_N^G$	6	1	63	IT = [1, 1, 1]
6	1			1 <sub>1</sub>	1			6	1			
1 <sub>1</sub>		1	2	1 <sub>2</sub>		1		1		1		
13			3	1 <sub>3</sub>			3	14 <sub>1</sub>			1	
20			1					14 <sub>2</sub>			1	
1 <sub>2</sub>			2					35			1	

---

$$\boxed{G = S_7, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 8$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 7$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \frac{\dim \mid 1_1 \ 1_2 \ 6_1 \ 6_2 \ 14_1 \ 14_2 \ 14_3 \ 14_4 \ 15_1 \ 15_2 \ 20 \ 21_1 \ 21_2 \ 35_1 \ 35_2}{\text{VFH} \mid 1_1 \ 1_2 \ 2_1 \ 2_2 \ 2_3 \ 2_4 \ 2_5 \ 2_6 \ 3_1 \ 3_2 \ 4 \ 5_1 \ 5_2 \ 7_1 \ 7_2}$$

$$1_P^N : \frac{\dim \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4 \ 1_5 \ 1_6 \ 1_7 \ 1_8}{\text{VFH} \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4 \ 1_5 \ 1_6 \ 1_7 \ 1_8}$$

$$1_N^G : \frac{\dim \mid 1 \ 6 \ 14_1 \ 14_2 \ 21 \ 35_1 \ 35_2}{\text{VFH} \mid 1_1 \ 1_2 \ 1_3 \ 1_4 \ 1_6 \ 1_7 \ 1_8}$$

**Beachte:** Die Endomorphismenringe  $\text{End}_{KN}(K_P^N)$  und  $\text{End}_{KG}(K_N^G)$  sind kommutativ.

$$p = 5, G = S_7, P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

**Beachte:** Die 5-Sylowgruppe ist zyklisch.

$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$15_1^3$	$15_2^3$	$20_1^4$	$35_1^7$	$35_2^7$	$6_1$	$20_2$	$21_1$	$21_2$	$35_3$	$35_4^2$	$6_2$	$20_3$	$21_3$	$21_4$	$35_5$	$35_6^2$
$1_1$	1												1						
$1_2$		1																	1
$15_1$			1																
$15_2$				1															
$20$					1														
$35_1$						1													
$35_2$							1												
$6_1$								1	2			1							
$8_1$									1	1	1	2	1						
$13_1$										1	1	1	2						
$6_2$														1	2				1
$8_2$															1	1	1	2	1
$13_2$																1	1	1	2
soc	$1_1$	$1_2$	$15_1$	$15_2$	$20$	$35_1$	$35_2$	$6_1$	$6_1$	$8_1$	$13_1$	$8_1$	$13_1$	$6_2$	$6_2$	$8_2$	$13_2$	$8_2$	$13_2$
hd	$1_1$	$1_2$	$15_1$	$15_2$	$20$	$35_1$	$35_2$	$6_1$	$6_1$	$13_1$	$8_1$	$8_1$	$13_1$	$6_2$	$6_2$	$13_2$	$8_2$	$8_2$	$13_2$

$CG_P$	$1_1$	$1_2$	$3_1^3$	$3_2^3$	$4_1^4$	$7_1^7$	$7_2^7$	$2_1$	$4_1$	$5_1$	$5_2$	$7_3$	$7_4^2$	$2_2$	$4_2$	$5_3$	$5_4$	$7_5$	$7_6^2$
$1_1$	1																		
$1_2$		1																	
$3_1$			1																
$3_2$				1															
$4_1$					1														
$7_1$						1													
$7_2$							1												
$1_3$								1	1										
$1_4$								1	2										
$1_5$										1	1	1	1						
$1_6$										1	1	1	1						
$1_7$									1	1	1	2	1						
$2_1$										1	1	1	2						
$1_8$														1	1				
$1_9$														1	2			1	
$1_{10}$																1	1	1	1
$1_{11}$																1	1	1	1
$1_{12}$															1	1	1	2	1
$2_2$																1	1	1	2
$k_P^G$	<b>1<sub>1</sub></b>	<b>1<sub>2</sub></b>	<b>15<sub>1</sub></b>	<b>15<sub>2</sub></b>	<b>20<sub>1</sub></b>	<b>35<sub>1</sub></b>	<b>35<sub>2</sub></b>	<b>6<sub>1</sub></b>	<b>20<sub>2</sub></b>	<b>21<sub>1</sub></b>	<b>21<sub>2</sub></b>	<b>35<sub>3</sub></b>	<b>35<sub>4</sub></b>	<b>6<sub>2</sub></b>	<b>20<sub>3</sub></b>	<b>21<sub>3</sub></b>	<b>21<sub>4</sub></b>	<b>35<sub>5</sub></b>	<b>35<sub>6</sub></b>
$5^x$	$5^0$	$5^0$	5	5	5	5	5	$5^0$	5	$5^0$	$5^0$	5	5	$5^0$	5	$5^0$	$5^0$	5	5
soc	$1_1$	$1_2$	$3_1$	$3_2$	$4_1$	$7_1$	$7_2$	$1_4$	$1_4$	$2_1$	$1_7$	$1_7$	$2_1$	$1_9$	$1_9$	$2_2$	$1_{12}$	$1_{12}$	$2_2$
hd	$1_1$	$1_2$	$3_1$	$3_2$	$4_1$	$7_1$	$7_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$2_1$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$	$1_{11}$	$1_{12}$	$2_2$

**Bemerkung:** Der Endomorphismenring ist nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch, was die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt.

$$II = [I^{15}]$$

$D_P^G$	$1_1$	$1_2$	$15_1$	$15_2$	$20_1$	$35_1$	$35_2$	$6_1$	$20_1$	$21_1$	$21_2$	$35_3$	$35_4$	$6_2$	$20_2$	$21_3$	$21_4$	$35_5$	$35_6$			
$1_1$	1																				$1_1$	
$1_2$		1																				$1_2$
$15_1$			1																			$2_1$
$15_2$				1																		$2_2$
$20$					1																	$2_3$
$35_1$						1																$2_4$
$35_2$							1															$2_5$
$6_1$								1	1													$2_6$
$14_1$									1													$3_1$
$14_2$												1										$3_2$
$21_1$										1	1	1	1									4
$6_2$														1	1							$5_1$
$14_3$															1						1	$5_2$
$14_4$																						1
$21_2$																1	1	1	1			$7_1$
	$1_1$	$1_2$	$3_1$	$3_2$	$4_1$	$7_1$	$7_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$2_1$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$	$1_{11}$	$1_{12}$	$2_2$			$7_2$



---

$D_N^G$	1	$35_1$	$35_2$	20	$35_3$	
$1_1$	1					
$35_1$		1				
$35_2$			1			
6				1		$IT = [1^5]$
$14_1$				1		
$14_2$					1	
21					1	

---



---

$$\boxed{G = S_7, P \in \text{Syl}_7(G)}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 7$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 6$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \begin{array}{c|cccccccccccccc} \dim & 1_1 & 1_2 & 14_1 & 14_2 & 14_3 & 14_4 & 15_1 & 15_2 & 20 & 21_1 & 21_2 & 35_1 & 35_2 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 2_1 & 2_2 & 2_3 & 2_4 & 3_1 & 3_2 & 2_5 & 3_3 & 3_4 & 5_1 & 5_2 \end{array}$$

$$1_P^N : \begin{array}{c|cccccc} \dim & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 \end{array}$$

$$1_N^G : \begin{array}{c|ccccccc} \dim & 1 & 14_1 & 14_2 & 15 & 20 & 21 & 35 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7 \end{array}$$


---

$$p = 7, G = S_7, P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Beachte: Die 7-Sylowgruppe ist zyklisch.

$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$14_1^2$	$14_2^2$	$14_3^2$	$14_4^2$	$21_1^3$	$21_2^3$	$35_1^5$	$35_2^5$	$15_1$	$15_2$	$35_3$	$15_3$	$15_4$	$35_4$
$1_1$	1															
$1_2$		1														
$14_1$			1													
$14_2$				1												
$14_3$					1											
$14_4$						1										
$21_1$							1									
$21_2$								1								
$35_1$									1							
$35_2$										1						
$5_1$											1	1	1			
$10_1$											1	1	2			1
$5_2$														1	1	1
$10_2$													1	1	1	2
soc	$1_1$	$1_2$	$14_1$	$14_2$	$14_3$	$14_4$	$21_1$	$21_2$	$35_1$	$35_2$	$5_1$	$10_1$	$10_1$	$5_2$	$10_2$	$10_2$
hd	$1_1$	$1_2$	$14_1$	$14_2$	$14_3$	$14_4$	$21_1$	$21_2$	$35_1$	$35_2$	$10_1$	$5_1$	$10_1$	$10_2$	$5_2$	$10_2$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1^2$	$2_2^2$	$2_3^2$	$2_4^2$	$3_1^3$	$3_2^3$	$5_1^5$	$5_2^5$	$3_3$	$3_4$	$5_3$	$3_5$	$3_6$	$5_4$
$1_1$	1															
$1_2$		1														
$2_1$			1													
$2_2$				1												
$2_3$					1											
$2_4$						1										
$3_1$							1									
$3_2$								1								
$5_1$									1							
$5_2$										1						
$1_3$											1	1	1			
$1_4$											1	1	1			
$1_5$											1	1	2			1
$1_6$														1	1	1
$1_7$														1	1	1
$1_8$													1	1	1	2
$k_P^G$	$1_1$	$1_2$	$14_1$	$14_2$	$14_3$	$14_4$	$21_1$	$21_2$	$35_1$	$35_2$	$15_1$	$15_2$	$35_3$	$15_3$	$15_4$	$35_4$
$7^x$	$7^0$	$7^0$	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^0$	$7^0$	7	$7^0$	$7^0$	7
soc	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$3_1$	$3_2$	$5_1$	$5_2$	$1_4$	$1_5$	$1_5$	$1_7$	$1_8$	$1_8$
hd	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$3_1$	$3_2$	$5_1$	$5_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockel zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und insbesondere nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	$1_1$	$1_2$	$14_1$	$14_2$	$14_3$	$14_4$	$21_1$	$21_2$	$35_1$	$35_2$	$15_1$	$15_2$	$15_3$	$15_4$	$35_3$	$35_4$
$1_1$	1															
$1_2$		1														
$14_1$			1													
$14_2$				1												
$14_3$					1											
$14_4$						1										
$21_1$							1									
$21_2$								1								
$35_1$									1							
$35_2$										1						
$15_1$											1					
$15_2$												1				
$20$																
$21_1$																
$21_2$																
$35_1$																
$35_2$																
$15_1$																
$15_2$																
$20$																
	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$3_1$	$3_2$	$5_1$	$5_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$

$$IT = [1^{16}]$$

**Bemerkung:** Die unzerlegbaren Summanden  $15_1$  und  $15_2$  bzw.  $15_3$  und  $15_4$  sind modulo 7 nicht isomorph, obwohl die jeweiligen Konstituenten in Charakteristik 0 isomorph sind. Die PIMs  $3_4, 5_3$  sowie  $3_6, 5_4$  von  $\mathfrak{E}^k$  haben isomorphe Sockel. Der PIM  $3_4$  bzw.  $3_6$  korrespondiert zum unzerlegbaren direkten Summanden  $15_2$  bzw.  $15_4$  von  $k_P^G$  und ist jeweils der Green-Korrespondent eines Gewichtsmoduls, wohingegen der jeweilige Partner zu  $35_3$  bzw.  $35_4$  korrespondiert und

kein Gewichts-Green-Korrespondent ist. Die unzerlegbaren direkten Summanden  $14_1, 14_2, 14_3, 14_4, 21_1, 21_2, 35_1, 35_2$  sind projektiv einfach. Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1}_1 \oplus 14_* \oplus 14_* \oplus 21_* \oplus 35 \oplus 35, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{15}_1 \oplus 21_* \oplus 14_* \oplus 35_* \oplus 35_*, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{15}_2 \oplus 21_* \oplus 14_* \oplus 35_* \oplus 35_*, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{15}_3 \oplus 21_* \oplus 14_* \oplus 35_* \oplus 35_*, \\ {}^5S_N^G &= \mathbf{1}_2 \oplus 14_* \oplus 14_* \oplus 21_* \oplus 35_* \oplus 35_*, \\ {}^6S_N^G &= \mathbf{15}_4 \oplus 21_* \oplus 14_* \oplus 35_* \oplus 35_*. \end{aligned}$$

Wir verzichten auf die genaue Indizierung der projektiven Summanden und deuten dies durch einen \* an.

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{kG}(k_N^G)$ :

$k_N^G$	1	$14_1$	$14_2$	21	$35_1$	$35_2$	$C_N^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	2
1	1						$1_1$	1					
$14_1$		1					$1_2$		1				
$14_2$			1				$1_3$			1			
21				1			$1_4$				1		
35					1		$1_5$					1	
$10_1$						2	$1_6$						2
5						1							
$10_2$						1							

$D_N^G$	1	$14_1$	$14_2$	21	$35_1$	$35_2$
1	1					
$14_1$		1				
$14_2$			1			
21				1		
35					1	
15						1
20						1

$IT = [1^6]$

**5.6.7**  $G = A_8$

$$G = A_8, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}) = 5$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	14	20	56	64
VFH	1 <sub>1</sub>	3 <sub>1</sub>	2	3 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>

Charaktertafel:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\mathbf{a}_9$	$\mathbf{a}_{10}$	$\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{12}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	4	2	2	16	64	32	32	2	8	4	4	1
$\mu_2$	3	0	3	3	-4	-16	-8	-8	3	-4	2	2	14
$\mu_3$	2	5	1	1	10	16	-4	-4	1	0	-2	-2	20
$\mu_4$	3	-3	0	0	-4	-4	4	4	0	2	-1	-1	56
$\mu_5$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	64

	$\mathbf{a}_{13}$	$\mathbf{a}_{14}$	$\mathbf{a}_{15}$	$\mathbf{a}_{16}$	$\mathbf{a}_{17}$	$\mathbf{a}_{18}$	$\mathbf{a}_{19}$	$\mathbf{a}_{20}$	$\mathbf{a}_{21}$	$\mathbf{a}_{22}$	$\mathbf{a}_{23}$	$\mathbf{a}_{24}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	8	32	16	16	4	16	8	8	4	16	8	8	1
$\mu_2$	-4	16	0	0	2	0	8	-4	2	0	-4	8	14
$\mu_3$	0	-4	-4	-4	-2	-4	0	0	-2	-4	0	0	20
$\mu_4$	2	-2	0	0	-1	0	-1	2	-1	0	2	-1	56
$\mu_5$	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	64

$$p = 2, G = A_8, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	64	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	34	56 <sub>1</sub>	56 <sub>2</sub>	76
1	1					2	2	2
64		1						
4 <sub>1</sub>			1	1	1			
4 <sub>2</sub>			1	1	1			
6			1	1	2			1
20 <sub>1</sub>						1	1	1
20 <sub>2</sub>						1	1	1
14					1	1	1	2
soc	1	64	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	6	20 <sub>1</sub>	20 <sub>2</sub>	14
hd	1	64	4 <sub>2</sub>	4 <sub>1</sub>	6	20 <sub>2</sub>	20 <sub>1</sub>	14

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$3_1$	$3_2$	$5_1$	$3_3$	$3_4$	$5_2$
$1_1$	1							
$1_2$		1						
$1_3$			1	1	1			
$1_4$			1	1	1			
$1_5$			1	1	2			1
$1_6$						1	1	1
$1_7$						1	1	1
$1_8$					1	1	1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>64</b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>	<b>34</b>	<b>56<sub>1</sub></b>	<b>56<sub>2</sub></b>	<b>76</b>
$2^x$	$2^0$	$2^6$	2	2	2	$2^3$	$2^3$	$2^2$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_7$	$1_6$	$1_8$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_4$	$1_3$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$

**Bemerkung:** Wegen  $A_8 \cong GL_4(2)$  ist  $A_8$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik. Folglich ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  nach Satz 3.4.8 quasi-Frobenius. Wir können wegen der Diagonaleinträge  $c_{3,3}, c_{4,4}, c_{6,6}$  und  $c_{7,7}$  jedoch ausschließen, dass  $\mathfrak{E}^k$  symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>64</b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>	<b>34</b>	<b>56<sub>1</sub></b>	<b>56<sub>2</sub></b>	<b>76</b>	
1	1								$1_1$
64		1							$1_2$
14			1	1	1				$3_1$
20					1			1	2
56						1	1	1	$3_2$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	

$IT = [1^5]$

**Bemerkung:** Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Der unzerlegbare direkte Summand 64 von  $k_P^G$  ist projektiv einfach. Die beiden direkten Summanden  $56_1$  und  $56_2$  haben Vertizes der Ordnung 8, die aber nicht konjugiert sind. Für die Induktionen gilt:

$${}^8S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{56}_1 \oplus 64,$$

$${}^8S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{56}_2 \oplus 64.$$

Der direkte Summand 76 hat einen Vertex  $Q_2$  der Ordnung 16. Es gilt:

$${}^8S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{76} \oplus 64.$$

Die direkten Summanden  $14_1, 14_2$  und  $34$  haben paarweise nicht konjugierte Vertizes der Ordnung 32. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{14}_1 \oplus 56_1 \oplus 64 \oplus 76, \\ {}^2S_{N(Q_4)}^G &= \mathbf{14}_2 \oplus 56_2 \oplus 64 \oplus 76, \\ {}^2S_{N(Q_5)}^G &= \mathbf{34} \oplus 56_1 \oplus 56_2 \oplus 64. \end{aligned}$$

Wegen  $N_G(P) = P$  gilt  ${}^1S_N^G = k_P^G$ .

$$\boxed{G = A_8, P \in \text{Syl}_3(G)}$$

Dimensionen der Zentren :

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 14$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 5$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 8$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$\begin{aligned} 1_P^G : & \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 7 & 14 & 20 & 21_1 & 21_2 & 21_3 & 28 & 35 & 45_1 & 45_2 & 56 & 64 & 70 \\ 1_1 & 3 & 2 & 4_1 & 1_2 & 1_3 & 5_1 & 4_2 & 7 & 5_2 & 5_3 & 4_3 & 8 & 6 \end{array} \right. \\ 1_P^N : & \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{ccccc} 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2 \end{array} \right. \\ 1_N^G : & \frac{\dim}{\text{VFH}} \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & 7 & 14 & 20 & 28 & 56 & 64 & 70 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 2 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{p = 3, G = A_8, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

$k_P^G$	1	$45_1^5$	$45_2^5$	$21^4$	63	7	$27^2$	28	34	$35^2$	90	$99^2$	$162^3$	$225^3$
1	1								1		2	1	1	2
$45_1$		1												
$45_2$			1											
21				1	3									
7						1	2		1		2		1	2
13							1		2		3			1
28								1				1	3	2
35										1	1	2	2	4
soc	1	$45_1$	$45_2$	7	21	7	28	13	35	21	13	35	28	35

$C_P^G$	1	$5_1^5$	$5_2^5$	$5_3^4$	$7_1$	3	$7_2^2$	6	10	$7_3^2$	$15^2$	4	$18^3$	$25^3$
$1_1$	1													
$5_1$		1												
$5_2$			1											
4				1	1									
$1_2$				1	3									
$1_3$						1	1							
$2_1$						1	2	1	1					
$1_4$							1	2	2					
$1_5$							1	2	3					1
$2_2$										1	1			1
$2_3$										1	2		1	2
$1_6$												1	1	
$3_1$											1	1	3	2
$3_2$									1	1	2		2	4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>45<sub>1</sub></b>	<b>45<sub>2</sub></b>	<b>21</b>	<b>63</b>	<b>7</b>	<b>27</b>	<b>34</b>	90	<b>35</b>	99	<b>28</b>	162	225
$3^x$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	3	$3^2$	$3^0$	$3^3$	$3^0$	$3^2$	$3^0$	$3^2$	$3^0$	$3^4$	$3^2$
soc	$1_1$	$5_1$	$5_2$	$1_2$	$1_2$	$2_1$	$1_5 2_1$	$1_5$	$1_5$	$3_2$	$3_2$	$3_1$	$3_1$	$3_2$
hd	$1_1$	$5_1$	$5_2$	4	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$1_4$	$1_5$	$2_2$	$2_3$	$1_6$	$3_1$	$3_2$

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius, insbesondere also auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	1	<b>45<sub>1</sub></b>	<b>45<sub>2</sub></b>	<b>21</b>	63	<b>7</b>	27	<b>34</b>	90	<b>35</b>	99	<b>28</b>	162	225
1	1													$1_1$
$45_1$		1												$5_2$
$45_2$			1											$5_3$
$21_1$					1									$1_2$
$21_2$					1									$1_3$
$21_3$				1	1									$5_1$
7						1	1							3
14								1	1					2
20							1	1	1					$4_1$
56									1					$4_3$
35										1	1			7
64											1		1	1
70												1	1	6
28												1	1	$4_2$
	$1_1$	$5_1$	$5_2$	4	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$1_4$	$1_5$	$2_2$	$2_3$	$1_6$	$3_1$	$3_2$

$IT = [1^{14}]$

**Bemerkung:** Es gibt sieben Äquivalenzklassen auf der Menge der PIMs von  $\mathfrak{E}^k$ . Neben den projektiv einfachen  $\mathfrak{E}^k$ -Moduln bilden  $\{5_3, 7_1\}$  (mit einem Sockelkonstituenten),  $\{3, 7_2, 6, 10\}$  (mit zwei Sockelkonstituenten),  $\{7_3, 15, 25\}$  (mit einem Sockelkonstituenten) und  $\{4, 18\}$  (mit einem Sockelkonstituenten) die Äquivalenzklassen. Dabei korrespondiert  $\{5_3, 7_1\}$  zu der Äquivalenzklasse  $\{21, 63\}$  auf der Menge der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ , die nur 21, dessen Dimension nicht von 3 geteilt wird, als Gewichts-Green-Korrespondenten hervorbringt. Analoges gilt für  $\{4, 18\}$ . Die vier PIMs  $3, 7_2, 6, 10$  haben nur zwei verschiedene Sockelkonstituenten. Nur die beiden dazu korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden 7 und 34 in  $k_P^G$ , deren Dimension nicht von 3 geteilt wird, sind Gewichts-Green-Korrespondenten. Zudem haben die beiden Gewichts-Green-Korrespondenten nicht-isomorphe Sockelkonstituenten. Insgesamt werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Die unzerlegbaren direkten Summanden  $45_1$  und  $45_2$  von  $k_P^G$  sind projektiv einfach. Die unzerlegbaren Moduln 21 und 63 liegen in einem Block mit Defekt 1, alle übrigen nicht projektiv einfachen liegen im Hauptblock. Der Gewichts-Green-Korrespondent 21 hat Vertex  $Q_1$  der Ordnung 3. Es gilt für die Induktion dieses Gewichtsmoduls nach  $G$ :

$${}^6S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{21} \oplus 45_1 \oplus 45_2 \oplus 225.$$

Insbesondere ist 225 ein projektiver unzerlegbarer  $kG$ -Modul. Die übrigen direkten Summanden, die Gewichts-Green-Korrespondenten sind, haben  $P$  als Vertex. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 27 \oplus 90 \oplus 162, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{7} \oplus 21 \oplus 45_1 \oplus 45_2 \oplus 162, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{28} \oplus 27 \oplus 63 \oplus 162, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{34} \oplus 21 \oplus 225. \\ {}^5S_N^G &= \mathbf{35} \oplus 21 \oplus 45_1^2 \oplus 45_2^2 \oplus 99 \oplus 225. \end{aligned}$$


---



---

### 5.6.8 $G = S_8$

$$G = S_8, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Dimension des Zentrums:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^G) = 7$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	20	56 <sub>1</sub>	56 <sub>2</sub>	64
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>

$$p = 2, G = S_8, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Aus Platzgründen verzichten wir auf das  $\oplus$ -Zeichen bei den Sockelkonstituenten von  $\mathfrak{E}^k$ .

$k_P^G$	1	64	28	34	76	112	$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	3 <sub>2</sub>
1	1				2	4	1 <sub>1</sub>	1					
64		1					1 <sub>2</sub>		1				
8			2	1			1 <sub>3</sub>			2	1		
6			2	2	1		1 <sub>4</sub>			1	2	1	
14				1	2	2	1 <sub>5</sub>				1	2	1
40					1	2	1 <sub>6</sub>					1	2
soc	1	64	8	6	14	40	$k_P^G$	<b>1</b>	<b>64</b>	<b>28</b>	<b>34</b>	<b>76</b>	<b>112</b>
							$2^x$	$2^0$	$2^6$	$2^2$	2	$2^2$	$2^4$
							soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>3</sub> 1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub> 1 <sub>6</sub>	1 <sub>6</sub>
							hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>64</b>	<b>28</b>	<b>34</b>	<b>76</b>	<b>112</b>	
1	1						1 <sub>1</sub>
64		1					1 <sub>4</sub>
14 <sub>1</sub>			1				1 <sub>2</sub>
14 <sub>2</sub>			1	1			2 <sub>1</sub>
20				1	1		2 <sub>2</sub>
56 <sub>2</sub>					1	1	2 <sub>3</sub>
56 <sub>1</sub>						1	1 <sub>3</sub>
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	

$IT = [1^6]$

**Bemerkung:** Wie die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, ist  $\mathfrak{E}^k$  nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch.

Alle direkten Summanden sind Gewichts-Green-Korrespondenten. Das bestätigt unsere Vermutung aus Abschnitt 5.3, denn die sechs PIMs liefern auch sechs Sockelkonstituenten. Es gibt keine projektiv einfachen Gewichtsmoduln. Der Gewichts-Green-Korrespondent 64 von  $k_P^G$  hat Vertex  $Q_1$  der Ordnung 2 und korrespondiert zu einem 2-dimensionalen Gewichtsmodul, dessen Induktion nach  $G$  sich wie folgt zerlegt.

$${}^{16}S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{64} \oplus 384.$$

Der Gewichts-Green-Korrespondent 112 hat Vertex  $Q_2$  der Ordnung 8 und korrespondiert zu einem 8 dimensionalen Gewichtsmodul. Für die Induktion von diesem Gewichtsmodul nach  $G$  gilt:

$${}^8S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{112} \oplus 128.$$

Die unzerlegbaren direkten Summanden 28 und 76 haben Vertizes  $Q_3$  und  $Q_4$  der Ordnung  $2^5$ , die untereinander nicht konjugiert sind. Die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  ergeben:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{28} \oplus 112 \oplus 128 \oplus 152, \\ {}^2S_{N(Q_4)}^G &= \mathbf{76} \oplus 64 \oplus 280. \end{aligned}$$

Der Gewichts-Green-Korrespondent 34 hat Vertex  $Q_5$  der Ordnung  $2^6$ . Die Induktion des zugehörigen Gewichtsmoduls nach  $G$  ergibt:

$${}^2S_{N(Q_5)}^G = \mathbf{34} \oplus 64 \oplus 112.$$

Schließlich gilt für den trivialen Modul  ${}^1S_N^G = k_P^G$  wegen  $N_G(P) = P$ .

---



---

### 5.6.9 $G = A_9$

$$G = A_9, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	8	27	42	48	84	105	120	162	168	189	216
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	3 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	4	1 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	3 <sub>5</sub>

$$p = 2, G = A_9, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	8	48	$384^2$	432	$120_1$	$120_2$	$126_1$	$126_2$	252	258	576
1	1					2	2	2	2	4	4	8
$8_1$								2	2		2	2
$8_2$								2	2		2	2
$8_3$		1		2	2							
$20_1$						1	1	1	1	1	1	3
$20_2$						1	1	1	1	1	1	3
26								2	2	2	4	4
48			1	1	2							
78						1	1			2	1	4
160				2	2							
soc	1	8	48	160	$48 \oplus 160$	$20_1$	$20_2$	$8_1$	$8_2$	$26 \oplus 78$	26	78

Um Platz zu sparen, verzichten wir auf das  $\oplus$ -Zeichen zwischen den Sockelkonstituenten in der Cartan-Matrix von  $\mathfrak{E}^k$ .

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2$	$6_3^2$	$8$	$4_1$	$4_2$	$6_1$	$6_2$	$9_1$	$11$	$9_2$
$1_1$	1											
$1_2$		1										
$1_3$			1	2	3							
$1_4$			1		1							
$2$				2	2							
$1_5$						1	1			1		1
$1_6$						1	1			1		1
$1_7$								2	2		2	
$1_8$								2	2		2	
$1_9$						1	1			3	2	2
$1_{10}$								2	2	2	4	1
$1_{11}$						1	1			2	1	4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>48</b>	<b>384</b>	<b>432</b>	<b>120<sub>1</sub></b>	<b>120<sub>2</sub></b>	<b>126<sub>1</sub></b>	<b>126<sub>2</sub></b>	<b>252</b>	<b>258</b>	<b>576</b>
$2^x$	$2^0$	$2^3$	$2^4$	$2^7$	$2^4$	$2^3$	$2^3$	2	2	$2^2$	2	$2^6$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	2	$1_3 2$	$1_{11} 1_6$	$1_{11} 1_5$	$1_7$	$1_8$	$1_{10} 1_{11}$	$1_{10} 1_{11}$	$1_{11}$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_4$	2	$1_3$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$	$1_{11}$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockelkomponenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>48</b>	<b>384</b>	<b>432</b>	<b>120<sub>1</sub></b>	<b>120<sub>2</sub></b>	<b>126<sub>1</sub></b>	<b>126<sub>2</sub></b>	<b>252</b>	<b>258</b>	<b>576</b>
1	1											
8		1										
48			1		1							
168				1	1							
216				1	1							
27										1	1	
42								1	1		1	
84								1	1		1	
105										1	1	1
120						1	1			1		1
162												1
189												1
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	2	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$	$1_{11}$

$$IT = [1^8, 0^4]$$

**Bemerkung:** Die PIMs  $2, 6_3$  und  $8$  von  $\mathfrak{C}^k$  haben insgesamt nur zwei Sockelkonstituenten. Der zu  $8$  korrespondierende unzerlegbare direkte Summand von

$k_P^G$  ist 384 und kein Gewichts-Green-Korrespondent. Die beiden anderen korrespondierenden direkten Summanden 48 und 432 von  $k_P^G$  sind Gewichts-Green-Korrespondenten. Es gilt  $2^7 \mid 384$ , aber  $2^7 \nmid 48$  und  $2^7 \nmid 432$ . Analog haben die drei PIMs  $9_1, 9_2$  und 11 nur zwei verschiedene Sockelkonstituenten. Der zu  $9_2$  korrespondierende Modul ist 576 (mit  $2^6 \mid 576$ ) und kein Gewichts-Green-Korrespondent. Die beiden anderen 252 und 258 mit  $|252|_2 = 2^2$  und  $|258|_2 = 2$  sind die Gewichts-Green-Korrespondenten. Damit bestätigen sich die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3.

Der unzerlegbare direkte Summand 432 hat einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung 4. Für die Induktion vom Gewichtsmodul nach  $G$  gilt:

$${}^8S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{432} \oplus 576.$$

Die unzerlegbaren direkten Summanden  $120_1, 120_2$  und 48 haben Vertizes  $Q_2, Q_3$  und  $Q_4$  der Ordnung 8, die paarweise nicht konjugiert sind. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^8S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{120}_1 \oplus 384 \oplus 576, \\ {}^8S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{120}_2 \oplus 384 \oplus 576, \\ {}^8S_{N(Q_4)}^G &= \mathbf{48} \oplus Y, \end{aligned}$$

wobei  $Y$  eine Summe von unzerlegbaren Summanden ist, deren Dimension von höheren 2-Potenzen als 16 geteilt wird.

Der unzerlegbare direkte Summand 252 hat einen Vertex  $Q_5$  der Ordnung 16. Für die Induktion des zugehörigen Gewichtsmoduls nach  $G$  gilt:

$${}^4S_{N(Q_5)}^G = \mathbf{252} \oplus 432 \oplus 576.$$

Die unzerlegbaren direkten Summanden 258,  $126_1$  und  $126_2$  haben Vertizes  $Q_6, Q_7$  und  $Q_8$  der Ordnung 32, die paarweise nicht konjugiert sind. Für die Induktionen der jeweils korrespondierenden Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_6)}^G &= \mathbf{258} \oplus 48 \oplus 120_1 \oplus 120_2 \oplus 384 \oplus 576, \\ {}^2S_{N(Q_7)}^G &= \mathbf{126}_1 \oplus 120_1 \oplus 252 \oplus 384 \oplus 432 \oplus 576, \\ {}^2S_{N(Q_8)}^G &= \mathbf{126}_2 \oplus 120_2 \oplus 252 \oplus 384 \oplus 432 \oplus 576. \end{aligned}$$

Wegen  $N_G(P) = P$  gilt für die Induktion des trivialen Gewichtsmoduls:  ${}^1S_N^G = k_P^G$ .

---

$$G = A_9, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 2$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 11, \text{ falls } \text{char}(F) \neq 2, 3$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 12, \text{ falls } \text{char}(F) = 2, 3$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G: \begin{array}{c|cccccccccccccccc} \dim & 1 & 21_1 & 21_2 & 27 & 28 & 35_1 & 35_2 & 48 & 56 & 84 & 105 & 120 & 162 & 189 & 216 \\ \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2_1 & 1_5 & 1_6 & 2_2 & 2_3 & 2_4 & 1_7 & 2_5 & 2_6 & 3 & 2_7 \end{array}$$

$$1_P^N: \begin{array}{c|cc} \dim & 1_1 & 1_2 \\ \text{VFH} & 1_1 & 1_2 \end{array}$$

$$1_N^G: \begin{array}{c|cccccccccccc} \dim & 1 & 27 & 35_1 & 35_2 & 48 & 56 & 84 & 105 & 20 & 189 & 216 \\ \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 2_1 & 1_7 & 2_2 & 1_8 & 1_9 \end{array}$$

$$p = 3, G = A_9, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	162 <sup>2</sup>	27	84	118	252	435	189	405 <sup>2</sup>
1	1					3	4		
162		1							
7			1	2		3	3		
21			2	3			2		
27			1						1
35				1		3	7		
41					1	3	3		
189								1	2
soc	1	162	27	21	7 $\oplus$ 21	41	35	189	189

Aus Platzgründen verzichten wir in der Cartan-Matrix von  $\mathfrak{C}^k$  auf die  $\oplus$ -Zeichen bei den Sockelkonstituenten.

$C_P^G$	$1_1$	$2^2$	$1_2$	4	$6_1$	$6_2$	9	3	5
$1_1$	1								
$2_1$		1							
$1_2$			1						
$1_3$				2	1		1		
$1_4$				1	4	1			
$1_5$					1	3	2		
$1_6$				1		2	6		
$1_7$								1	1
$2_2$								1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>162</b>	<b>27</b>	<b>84</b>	<b>118</b>	<b>252</b>	<b>435</b>	<b>189</b>	405
$3^x$	$3^0$	$3^4$	$3^3$	3	$3^0$	$3^2$	3	$3^3$	$3^4$
soc	$1_1$	$2_1$	$1_2$	$1_3 1_4 1_6$	$1_3 1_4^2 1_5$	$1_5 1_6$	$1_5 1_6^2$	$2_2$	$2_2$
hd	$1_1$	$2_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$2_2$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>162</b>	<b>27</b>	<b>84</b>	<b>118</b>	<b>252</b>	<b>435</b>	<b>189</b>	405	
1	1									$1_1$
162		1								$2_6$
27			1							$1_4$
$21_1$					1					$1_2$
$21_2$					1					$1_3$
28				1	1					$2_1$
$35_1$							1			$1_5$
$35_2$							1			$1_6$
48					1	1				$2_2$
56				1			1			$2_3$
84						1	1			$2_4$
105							1			$1_7$
120						1	1			$2_5$
189								1	1	3
216									1	$2_7$
	$1_1$	$2_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$2_2$	

$IT = [1^9]$

**Bemerkung:** Die PIMs 3 und 5 von  $\mathfrak{C}^k$  bilden eine Äquivalenzklasse mit isomorphen Sockeln. Der zu 3 korrespondierende unzerlegbare direkte Summand 189 ist ein Gewichts-Green-Korrespondent, der zu 5 korrespondierende unzerlegbare Summand 405 nicht. Beachte hierbei, dass  $3^4 \mid 405$  und  $3^4 \nmid 189$  gilt. Insgesamt werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Die unzerlegbaren direkten Summanden 189 und 27 haben Vertex  $Q_1$  der Ordnung 3. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^9_1 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{189} \oplus 162 \oplus 405, \\ {}^9_2 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{27} \oplus 162 \oplus 567. \end{aligned}$$

Insbesondere ist der unzerlegbare direkte Summand 405 von  $k_P^G$  projektiv. Die unzerlegbaren direkten Summanden 252, 84 und 435 haben Vertizes der Ordnung 9. Von denen sind aber nur die Vertizes von 84 und 435 konjugiert. Für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^9 S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{252} \oplus 243 \oplus 162^2 \oplus 405^2 \oplus 891, \\ {}^{31} S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{435} \oplus 405, \\ {}^{32} S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{84} \oplus 162 \oplus 189 \oplus 405. \end{aligned}$$

Der triviale Modul und 118 haben  $P$  als Vertex. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 27 \oplus 405 \oplus 435 \oplus 252, \\ {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{118} \oplus 84 \oplus 405 \oplus 162^2 \oplus 189. \end{aligned}$$

Für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{k_G}(k_N^G)$  gilt schließlich:

$k_N^G$	1	27	405	252	435	$C_N^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2	5	8
1	1			3	4	1 <sub>1</sub>	1				
27		1	1			1 <sub>2</sub>		1			
189			2			1 <sub>3</sub>			2		
7				3	3	1 <sub>4</sub>				3	2
35				3	7	1 <sub>5</sub>				2	6
41				3	3						
21					2						

---

$D_N^G$	1	27	405	252	435	$IT = [1^5]$
1	1					
27		1	1			
189			2			
48				1		
84				1	1	
120				1	1	
56					1	
35 <sub>1</sub>					1	
35 <sub>2</sub>					1	
105					1	

---



---

5.6.10  $G = M_{11}$ 

$$G = M_{11}, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

$$1_P^G: \begin{array}{c|cccccccc} \dim & 1 & 10 & 11 & 16_1 & 16_2 & 44 & 45 & 55 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 2_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 4 & 2_2 & 3 \end{array}$$

Charaktertafel:

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{a}_7$	$\mathfrak{a}_8$	$\mathfrak{a}_9$	$\mathfrak{a}_{10}$	$\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_{13}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	1	16	8	16	4	16	16	16	8	16	16	16	16	1
$\mu_2$	2	22	6	12	3	-6	-6	-6	-3	-6	4	4	-6	10
$\mu_3$	1	-2	-4	4	1	-2	-2	-2	5	-2	-8	4	-2	11
$\mu_4$	1	-2	2	1	-2	$A$	1	$B$	-1	1	1	$\overline{B}$	1	$16_1$
$\mu_5$	1	-2	2	1	-2	$\overline{A}$	1	$\overline{B}$	-1	1	1	$B$	1	$16_2$
$\mu_6$	4	0	-2	-3	1	-1	1	2	6	1	0	-7	1	44
$\mu_7$	2	4	0	-3	-3	-3	1	2	-1	1	0	1	1	45
$\mu_8$	3	-6	0	1	2	3	-1	0	-4	-1	0	5	-1	55

	$\mathfrak{a}_{14}$	$\mathfrak{a}_{15}$	$\mathfrak{a}_{16}$	$\mathfrak{a}_{17}$	$\mathfrak{a}_{18}$	$\mathfrak{a}_{19}$	$\mathfrak{a}_{20}$	$\mathfrak{a}_{21}$	$\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_{23}$	$\mathfrak{a}_{24}$	$\chi(1)$	$\mathfrak{a}_{25}$
$\mu_1$	8	16	16	16	8	16	16	16	16	8	16	16	1
$\mu_2$	-3	4	4	4	7	4	4	-6	-6	-3	-6	-6	10
$\mu_3$	-1	-8	4	4	-1	4	4	10	-2	-1	-2	-2	11
$\mu_4$	-1	1	7	$B$	-1	1	-2	1	$\overline{B}$	-1	$\overline{A}$	1	$16_1$
$\mu_5$	-1	1	7	$\overline{B}$	-1	1	-2	1	$B$	-1	$A$	1	$16_2$
$\mu_6$	0	0	-1	-7	5	2	1	3	2	0	-1	1	44
$\mu_7$	-1	0	-5	1	-2	0	-3	1	2	-1	-3	1	45
$\mu_8$	2	0	-1	5	-3	-4	1	-5	0	2	3	-1	55

	$\mathfrak{a}_{26}$	$\mathfrak{a}_{27}$	$\mathfrak{a}_{28}$	$\mathfrak{a}_{29}$	$\mathfrak{a}_{30}$	$\mathfrak{a}_{31}$	$\mathfrak{a}_{32}$	$\mathfrak{a}_{33}$	$\mathfrak{a}_{34}$	$\mathfrak{a}_{35}$	$\mathfrak{a}_{36}$	$\mathfrak{a}_{37}$	$\chi(1)$
$\mu_1$	16	16	8	16	16	16	2	16	16	16	8	16	1
$\mu_2$	-4	-4	-2	-4	6	-2	1	-4	-4	-4	-2	6	10
$\mu_3$	4	-8	2	4	-2	-2	2	4	-8	4	2	-2	11
$\mu_4$	$B$	-2	2	$\overline{A}$	1	1	-1	$A$	-2	$\overline{B}$	2	1	$16_1$
$\mu_5$	$\overline{B}$	-2	2	$A$	1	1	-1	$\overline{A}$	-2	$B$	2	1	$16_2$
$\mu_6$	-2	4	-1	-5	-4	6	2	-5	4	-2	-1	-4	44
$\mu_7$	4	0	3	-1	2	-6	-2	-1	0	4	3	2	45
$\mu_8$	0	0	-3	3	0	0	0	3	0	0	-3	0	55

$$A = -E(11) - 4 * E(11)^2 - E(11)^3 - E(11)^4 - E(11)^5 \\ - 4 * E(11)^6 - 4 * E(11)^7 - 4 * E(11)^8 - E(11)^9 - 4 * E(11)^{10}$$

$$B = 5 * E(11) + 2 * E(11)^2 + 5 * E(11)^3 + 5 * E(11)^4 + 5 * E(11)^5 + 2 * E(11)^6 + 2 * E(11)^7 + 2 * E(11)^8 + 5 * E(11)^9 + 2 * E(11)^{10}$$

$$p = 2, G = M_{11}, P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$k_P^G$	1	16 <sub>1</sub>	16 <sub>2</sub>	10	44	120	144 <sup>2</sup>
1	1					2	2
16 <sub>1</sub>		1					
16 <sub>2</sub>			1				
10				1		3	1
44					1	2	3
soc	1	16 <sub>1</sub>	16 <sub>2</sub>	10	44	10 ⊕ 44	44
$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2	4	10	9 <sup>2</sup>
1 <sub>1</sub>	1						
1 <sub>2</sub>		1					
1 <sub>3</sub>			1				
1 <sub>4</sub>				1		1	
1 <sub>5</sub>					1	1	1
1 <sub>6</sub>				1	1	4	2
2					1	2	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>16<sub>1</sub></b>	<b>16<sub>2</sub></b>	<b>10</b>	<b>44</b>	120	144
2 <sup>x</sup>	2 <sup>0</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>4</sup>	2	2 <sup>2</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>4</sup>
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>6</sub>	2	1 <sub>6</sub> ⊕ 2	2
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	2

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt insbesondere, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und insbesondere nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>16<sub>1</sub></b>	<b>16<sub>2</sub></b>	<b>10</b>	<b>44</b>	120	144
1	1						
16 <sub>1</sub>		1					
16 <sub>2</sub>			1				
10				1		1	
11						1	
44					1	1	1
45							1
55						1	1
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	2

$$IT = [1^7]$$

**Bemerkung:** Die PIMs 2, 4, 10 und 9 von  $\mathfrak{E}^k$  bilden eine Äquivalenzklasse mit nur 2 verschiedenen Isomorphietypen als Sockelkonstituenten. Die zu 2 und 4 korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden 10 und 44 haben eine Dimension, die von einer kleineren 2-Potenz geteilt wird, als die der zu 9 und 10 korrespondierenden direkten Summanden 144 und 120. Damit werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Die unzerlegbaren direkten Summanden  $16_1$  und  $16_2$  von  $k_P^G$  sind projektiv einfach.

Der Gewichts-Green-Korrespondent 44 hat Vertex  $Q_1$  der Ordnung 4. Für die Induktion vom Gewichtsmodul nach  $G$  gilt:

$${}^2S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{44} \oplus 16_1 \oplus 16_2 \oplus 120 \oplus 144.$$

Der unzerlegbare direkte Summand 10 ist ein Gewichts-Green-Korrespondent und hat Vertex  $Q_2$  der Ordnung 8. Für die Induktion des Gewichtsmoduls nach  $G$  gilt:

$${}^2S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{10} \oplus 16_1 \oplus 16_2 \oplus 144^2.$$

Wegen  $N_G(P) = P$  gilt für den trivialen Modul als Green-Korrespondent des trivialen Gewichtsmoduls:  ${}^1S_N^G = k_P^G$ .

$$\boxed{G = M_{11}, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11}$$

Dimensionen der Zentren:

$$\dim_F(\mathbf{Z}_P^N) = 7$$

$$\dim_F(\mathbf{Z}_N^G) = 3$$

Konstituenten der Permutationscharaktere:

$$1_P^G : \begin{array}{c|cccccccc} \dim & 1 & 10_1 & 10_2 & 10_3 & 11 & 44 & 45 & 55 \\ \hline \text{VFH} & 1 & 2_1 & 2_2 & 2_3 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{array}$$

$$1_P^N : \begin{array}{c|ccccccc} \dim & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2_1 & 2_2 & 2_3 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2_1 & 2_2 & 2_3 \end{array}$$

$$1_N^G : \begin{array}{c|ccc} \dim & 1 & 10 & 44 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 \end{array}$$

$$p = 3, G = M_{11}, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$k_P^G$	1	$45^5$	10	$11^2$	54	$55_1$	$55_2$	$65_1^2$	$65_2^2$	$99^2$
1	1			1		1	1	1	1	1
45		1								
$5_1$				1	1	2	1	1	1	2
$5_2$				1	1	2	1	1	1	2
$10_1$			1		2	1				1
$10_2$							1	2	1	1
$10_3$							1	1	2	1
24					1	1	1	1	1	2
soc	1	45	$10_1$	$5_1$	$10_1$	$10_2$	$5_2$	$10_2 \oplus 24$	$10_3$	24

Wir schreiben aus Platzgründen die Sockelkonstituenten ohne  $\oplus$ -Zeichen.

$C_P^G$	1	$5^5$	2	$3^2$	6	$7_1$	$7_2$	$9_1^2$	$9_2^2$	$11^2$
$1_1$	1									
5		1								
$1_2$			1		1					
$2_1$				1		1				
$1_3$			1		2	1				1
$1_4$				1	1	2				1
$1_5$							1	1	1	1
$2_2$							1	2	1	1
$2_3$							1	1	2	1
$2_4$					1	1	1	1	1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>45</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	54	<b>55<sub>1</sub></b>	<b>55<sub>2</sub></b>	<b>65<sub>1</sub></b>	<b>65<sub>2</sub></b>	99
$3^x$	$3^0$	$3^2$	$3^0$	$3^0$	$3^3$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^2$
soc	$1_1$	5	$1_3$	$1_4$	$1_3$	$1_3 1_4 2_1 2_4$	$2_2$	$2_2 2_4$	$1_4 2_3$	$2_4$
hd	$1_1$	5	$1_2$	$2_1$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$2_2$	$2_3$	$2_4$

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und insbesondere nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	1	45	10	11	54	$55_1$	$55_2$	$65_1$	$65_2$	99
1	1									1
45		1								5
$10_1$									1	$2_1$
$10_2$							1			$2_2$
$10_3$			1		1					$2_3$
11				1		1				3
44					1	1				4
55							1	1	1	7
	$1_1$	5	$1_2$	$2_1$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$2_2$	$2_3$	$2_4$

$$IT = [1^{10}]$$

**Bemerkung:** Die PIMs 2, 3, 6, 7<sub>1</sub>, 7<sub>2</sub>, 9<sub>1</sub>, 9<sub>2</sub>, 11 von  $\mathfrak{E}^k$  bilden eine Äquivalenzklasse, die sechs Sockelkonstituenten hervorbringt. Dies entspricht der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3<sup>2</sup>, weil genau die beiden direkten Summanden 54, 99 von  $k_P^G$ , deren Dimension von 3 geteilt wird, keine Gewichts-Green-Korrespondenten sind, die übrigen wohl.

Der unzerlegbare direkte Summand 45 ist projektiv einfach. Alle übrigen Gewichts-Green-Korrespondenten haben eine 3-Sylowgruppe als Vertex. Die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  sind wie folgt:

$$\begin{aligned} {}^1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 54, \\ {}^2 S_N^G &= \mathbf{55}_1, \\ {}^3 S_N^G &= \mathbf{55}_2, \\ {}^4 S_N^G &= \mathbf{10} \oplus 45, \\ {}^{2_1} S_N^G &= \mathbf{65}_1 \oplus 45, \\ {}^{2_2} S_N^G &= \mathbf{65}_2 \oplus 45, \\ {}^{2_3} S_N^G &= \mathbf{11} \oplus 99. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den Permutationsmodul  $k_N^G$  und den Endomorphismenring  $\text{End}_{k_G}(k_N^G)$ :

$$\begin{array}{c|cc} k_N^G & 1 & 54 \\ \hline 1 & 1 & \\ 5_1 & & 1 \\ 5_2 & & 1 \\ 10 & & 2 \\ 24 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} C_N^G & 1 & 2 \\ \hline 1_1 & 1 & \\ 1_2 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} D_N^G & 1 & 54 \\ \hline 1 & 1 & \\ 10 & & 1 \\ 44 & & 1 \end{array} \quad IT = [1, 1]$$

---

<sup>2</sup>25.09.2008: Im Sockel von 9<sub>2</sub> muss es 1<sub>5</sub>2<sub>3</sub> heißen. Daher stimmt die Vermutung in diesem Beispiel nicht.

$$p = 5, G = M_{11}, P \in \text{Syl}_5(G), N_G(P) = P, |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$k_P^G$	1	$10_1^2$	$10_2^2$	$10_3^2$	$45^9$	$55_1^{11}$	11	$55_2^2$	$16_1$	$60_1^3$	$16_2$	$60_2^3$
soc	1	$10_1$	$10_2$	$10_3$	45	55	11	11	$16_1$	$16_1$	$16_2$	$16_2$
$C_P^G$	1	$2_1^2$	$2_2^2$	$2_3^2$	$9^9$	$11_1^{11}$	3	$11_2^2$	$4_1$	$12_1^3$	$4_2$	$12_2^3$
$1_1$	1											
$2_1$		1										
$2_2$			1									
$2_3$				1								
9					1							
11						1						
$1_2$							1	1				
$2_4$							1	2		1		1
$1_3$									1	1		
$3_1$								1	1	2		1
$1_4$											1	1
$3_2$								1		1	1	2
$k_P^G$	1	$10_1$	$10_2$	$10_3$	45	$55_1$	11	$55_2$	$16_1$	$60_1$	$16_2$	$60_2$
$5^x$	$5^0$	5	5	5	5	5	$5^0$	5	$5^0$	5	$5^0$	5
soc	$1_1$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	9	11	$2_4$	$2_4$	$3_1$	$3_1$	$3_2$	$3_2$
hd	$1_1$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	9	11	$1_2$	2	$1_3$	$3_1$	$1_4$	$3_2$

**Bemerkung:** Die PIMs  $3, 11_2$  und  $4_1, 12_1$  und  $4_2, 12_2$  bilden jeweils eine zweielementige Äquivalenzklasse mit jeweils einem Sockelkonstituenten. Dies steht im Einklang mit der Vermutung aus Abschnitt 5.3, denn die Untersuchung der Gruppe  $N_G(P)/P$  zeigt, dass es darin vier Gewichtsmodule der Dimension 1 gibt. Weil  $5^1$  die höchste 5-Potenz ist, die die Ordnung von  $G$  teilt, können die Gewichts-Green-Korrespondenten, die nicht projektiv einfach sind, nur eine zu 5 teilerfremde Dimension haben. Das sind die unzerlegbaren direkten Summanden  $1, 11, 16_1$  und  $16_2$ . Die PIMs zu  $11, 16_1$  und  $16_2$  bilden jeweils eine Äquivalenzklasse mit den PIMs zu den Nicht-Gewichts-Modulen  $55, 60_1$  und  $60_2$ .

$$p = 11, G = M_{11}, P \in \text{Syl}_{11}(G), N_G(P) = P, |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$k_P^G$	1	11	44 <sup>4</sup>	55 <sup>5</sup>	45 <sub>1</sub>	45 <sub>2</sub>	45 <sub>3</sub>	45 <sub>4</sub>	77
soc	1	11	44	55	9	10 <sub>1</sub>	10 <sub>2</sub>	16	16
$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	4 <sup>4</sup>	5 <sub>1</sub> <sup>5</sup>	5 <sub>2</sub>	5 <sub>3</sub>	5 <sub>4</sub>	5 <sub>5</sub>	7
1 <sub>1</sub>	1								
1 <sub>2</sub>		1							
4			1						
5				1					
1 <sub>3</sub>					1	1	1	1	1
1 <sub>4</sub>					1	1	1	1	1
1 <sub>5</sub>					1	1	1	1	1
1 <sub>6</sub>					1	1	1	1	1
1 <sub>7</sub>					1	1	1	1	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>11</b>	<b>44</b>	<b>55</b>	<b>45<sub>1</sub></b>	<b>45<sub>2</sub></b>	<b>45<sub>3</sub></b>	<b>45<sub>4</sub></b>	<b>77</b>
11 <sup>x</sup>	11 <sup>0</sup>	11	11	11	11 <sup>0</sup>	11 <sup>0</sup>	11 <sup>0</sup>	11 <sup>0</sup>	11
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	4	5	1 <sub>6</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>7</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	4	5	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>

**Bemerkung:** Die PIMs 5<sub>4</sub> und 7 bilden eine zweielementige Äquivalenzklasse, die nur einen Sockelkonstituenten hervorbringt. Tatsächlich ist der zu 5<sub>4</sub> korrespondierende direkte Summand 45<sub>4</sub> in  $k_P^G$  ein Gewichts-Green-Korrespondent, der zum PIM 7 korrespondierende direkte Summand 77 jedoch nicht. Dies steht im Einklang mit der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3. Für die Induktionen der nicht projektiv einfachen Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$${}^1_1 S_{N(P)}^G = \mathbf{1} \oplus 11 \oplus 55 \oplus 77,$$

$${}^1_2 S_{N(P)}^G = \mathbf{45}_1 \oplus 44 \oplus 55,$$

$${}^1_3 S_{N(P)}^G = \mathbf{45}_2 \oplus 44 \oplus 55,$$

$${}^1_4 S_{N(P)}^G = \mathbf{45}_3 \oplus 44 \oplus 55,$$

$${}^1_5 S_{N(P)}^G = \mathbf{45}_4 \oplus 44 \oplus 55.$$

### 5.6.11 $G = M_{12}$

$$G = M_{12}, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	11 <sub>1</sub>	11 <sub>2</sub>	16 <sub>1</sub>	16 <sub>2</sub>	45	54	55	66	99	144	176
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	4	1 <sub>8</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	3	2 <sub>3</sub>

$$p = 2, G = M_{12}, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

$k_P^G$	1	16 <sub>1</sub>	16 <sub>2</sub>	144	320 <sup>2</sup>	318	350
1	1					4	6
16 <sub>1</sub>		1			1		
16 <sub>2</sub>			1		1		
144				1	2		
10						5	8
44						6	6
soc	1	16 <sub>1</sub>	16 <sub>2</sub>	144	144	44 <sup>2</sup>	10 ⊕ 44

$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	3	5 <sup>2</sup>	13	15
1 <sub>1</sub>	1						
1 <sub>2</sub>		1					
1 <sub>3</sub>			1				
1 <sub>4</sub>				1	1		
2				1	2		
1 <sub>5</sub>						7	6
1 <sub>6</sub>						6	9
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>16<sub>1</sub></b>	<b>16<sub>2</sub></b>	<b>144</b>	<b>320</b>	<b>318</b>	<b>350</b>
$2^x$	2 <sup>0</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>6</sup>	2	2
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2	2	1 <sub>5</sub> <sup>2</sup> ⊕ 1 <sub>6</sub> <sup>2</sup>	1 <sub>5</sub> ⊕ 1 <sub>6</sub> <sup>3</sup>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	2	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>

**Bemerkung:** Die Sockelkonstituenten zeigen, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und folglich auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	1	16 <sub>1</sub>	16 <sub>2</sub>	144	320	318	350	
1	1							1 <sub>1</sub>
16 <sub>1</sub>		1						1 <sub>4</sub>
16 <sub>2</sub>			1					1 <sub>5</sub>
144				1	1			3
176					1			2 <sub>3</sub>
11 <sub>1</sub>							1	1 <sub>2</sub>
11 <sub>2</sub>							1	1 <sub>3</sub>
45						1		1 <sub>6</sub>
54						2	2	4
55							1	1 <sub>7</sub>
66						1	1	2 <sub>1</sub>
99						1	1	2 <sub>2</sub>
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	2	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	

**Bemerkung:** Die beiden PIMs 3 und 5 von  $\mathfrak{E}^k$  haben isomorphe einfache Sockelkonstituenten. Der zu 3 korrespondierende unzerlegbare direkte Summand 144 von  $k_P^G$  ist ein Gewichts-Green-Korrespondent, der zu 5 korrespondierende direkte Summand 320 nicht. Dabei gilt  $2^6 \mid 320$  und  $2^6 \nmid 144$ . Die beiden PIMs 13 und 15 bilden eine Äquivalenzklasse mit zwei Isomorphietypen als Sockelkonstituenten. Beide korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  sind Gewichts-Green-Korrespondenten. Damit werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Im einzelnen gilt: Die unzerlegbaren direkten Summanden 16<sub>1</sub>, 16<sub>2</sub> und 144 haben Vertex  $Q_1$  der Ordnung 4. Für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^2_1 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{144} \oplus 320^4 \oplus 384 \oplus 832, \\ {}^2_2 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{16}_1 \oplus 192 \oplus 320^4 \oplus 384 \oplus 768, \\ {}^2_3 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{16}_2 \oplus 192 \oplus 320^4 \oplus 384 \oplus 768. \end{aligned}$$

Die unzerlegbaren direkten Summanden 350 und 318 haben Vertizes  $Q_2$  und  $Q_3$  der Ordnung 32, die nicht konjugiert sind. Für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^2 S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{350} \oplus 320, \\ {}^2 S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{318} \oplus 16_1 \oplus 16_2 \oplus 320. \end{aligned}$$

Wegen  $N_G(P) = P$  gilt  ${}^1 S_N^G = k_P^G$ .

$$G = M_{12}, P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	11 <sub>1</sub>	11 <sub>2</sub>	45	54	55 <sub>1</sub>	55 <sub>2</sub>	55 <sub>3</sub>	66	99	120	144	176
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	3 <sub>1</sub>	2	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>	4 <sub>1</sub>	5	6	4 <sub>2</sub>	4 <sub>3</sub>

$$p = 3, G = M_{12}, P \in \text{Sy}_3(G), |G| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

$k_P^G$	1	$54^2$	$45^2$	$99^2$	189	$243^3$	$66_1$	$66_2$	$66_3$	$66_4$	$175_1$	$175_2$	297	$351_1$	$351_2$	592
1	1						2	2	2	2			5	2	2	4
54		1														
$45_1$			1		2	1										
99				1	1	2										
$10_1$							2	1			1		2	2	1	2
$10_2$							1	2				1	2	1	2	2
$15_1$									1	1	1	1	2	2	2	4
$15_2$									1	1	1	1	2	2	2	4
34							1	1	1	1			3	1	1	2
$45_2$											2	1	1	3	2	4
$45_3$											1	2	1	2	3	4
soc	1	54	$45_1$	99	$45_1$	99	$10_1$	$10_2$	$15_1$	$15_2$	$45_2$	$45_3$	34	$45_2$	$45_3$	$45_2 45_3 34$

Um Platz zu sparen schreiben wir die Socketkonstituenten ohne  $\oplus$ .

	1	2 <sup>2</sup>	7	3 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup>	9 <sup>3</sup> <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	11	4 <sub>3</sub>	4 <sub>4</sub>	13 <sub>1</sub>	13 <sub>2</sub>	9 <sub>2</sub>	9 <sub>3</sub>	26
$C_P^G$	1															
1 <sub>1</sub>	1															
2 <sub>1</sub>	1															
1 <sub>2</sub>		1														
2 <sub>2</sub>		1	1													
2 <sub>3</sub>				1	1											
3		1			1	2										
1 <sub>3</sub>							2	1	1							
1 <sub>4</sub>							1	2	1							
1 <sub>5</sub>							1	1	3	1	1	1	1			2
1 <sub>6</sub>									1	1	1					1
1 <sub>7</sub>									1	1	1					1
1 <sub>8</sub>									1			3	2	2	1	4
1 <sub>9</sub>									1			2	3	1	2	4
1 <sub>10</sub>											2	2	1	2	1	3
1 <sub>11</sub>											1	1	2	1	2	3
1 <sub>12</sub>									2	1	1	4	4	3	3	8
$k_P^G$	1	54	189	45	99	243	66 <sub>1</sub>	66 <sub>2</sub>	297	66 <sub>3</sub>	66 <sub>4</sub>	351 <sub>1</sub>	351 <sub>2</sub>	175 <sub>1</sub>	175 <sub>2</sub>	592
3 <sup>x</sup>	3 <sup>0</sup>	3 <sup>2</sup>	3 <sup>3</sup>	3 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	3 <sup>5</sup>	3	3	3 <sup>3</sup>	3	3	3 <sup>3</sup>	3 <sup>3</sup>	3 <sup>0</sup>	3 <sup>0</sup>	3 <sup>0</sup>
soc	1 <sub>1</sub>	2 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>	3	3	1 <sub>3</sub> 1 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub> 1 <sub>5</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>5</sub> 1 <sub>7</sub>	1 <sub>5</sub> 1 <sub>6</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>5</sub> 1 <sub>8</sub> 1 <sub>9</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	2 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>2</sub>	2 <sub>3</sub>	3	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	1 <sub>12</sub>

**Bemerkung:** Die Sockelkonstituenten zeigen, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und folglich auch nicht symmetrisch ist.

Die PIMs  $4_1, 4_2, 4_3, 4_4, 9_2, 9_3, 11, 13_1, 13_2, 26$  bilden eine Äquivalenzklasse, die sieben Sockelkonstituenten hervorbringt. Unter den korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  gibt es sieben Gewichts-Green-Korrespondenten und drei Nicht-Green-Korrespondenten. Die Dimensionen der letzteren drei sind

genau diejenigen, die durch die höchste 3-Potenz teilbar sind. Die PIMs 3, 7 und 5, 9<sub>1</sub> bilden zwei weitere Äquivalenzklassen, mit je einem Sockelkonstituenten. Auch hier bestätigen sich die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3. Die Gewichts-Green-Korrespondenten 45 und 99 haben Vertex  $Q_1$  der Ordnung 3. Die Induktionen der entsprechenden Gewichtsmoduln nach  $G$  ergeben:

$$\begin{aligned} {}^{3_1}S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{99} \oplus 54 \oplus 189 \oplus 243^4 \oplus_{i=1,2} 297_i \oplus 297_3^2 \oplus_{i=1,2} 351_i^2, \\ {}^{3_2}S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{45} \oplus 54^2 \oplus 189^2 \oplus 243^4 \oplus 297_* \oplus_{i=1,2} (351_i^2 \oplus 378_i). \end{aligned}$$

Die Gewichts-Green-Korrespondenten 66<sub>1</sub>, 66<sub>2</sub> und 66<sub>3</sub>, 66<sub>4</sub> haben Vertizes der Ordnung 9, wobei die der ersten beiden Moduln und die der letzten beiden jeweils untereinander konjugiert sind. Für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^{3_1}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{66_1} \oplus 54 \oplus 243 \oplus 297, \\ {}^{3_2}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{66_2} \oplus 243 \oplus 351, \\ {}^{3_1}S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{66_3} \oplus 54 \oplus 243 \oplus 297, \\ {}^{3_2}S_{N(Q_3)}^G &= \mathbf{66_4} \oplus 243 \oplus 351. \end{aligned}$$

Schließlich haben die Gewichts-Green-Korrespondenten 1, 175<sub>1</sub>, 175<sub>2</sub> und 592 die 3-Sylowgruppen als Vertizes. Die Induktionen der entsprechenden Gewichtsmoduln nach  $G$  ergeben:

$$\begin{aligned} {}^{1_1}S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 54^2 \oplus 66_* \oplus 66_* \oplus 99 \oplus 243 \oplus 297, \\ {}^{1_1}S_N^G &= \mathbf{175_1} \oplus 45 \oplus 66_* \oplus 243 \oplus 351, \\ {}^{1_1}S_N^G &= \mathbf{175_2} \oplus 45 \oplus 66_* \oplus 243 \oplus 351, \\ {}^{1_1}S_N^G &= \mathbf{592} \oplus 99 \oplus 189. \end{aligned}$$

Ein \* im Index deutet an, dass der explizite Isomorphietyp nicht bestimmt wurde.

---



---

### 5.6.12 $G = M_{22}$

$$p = 2, G = M_{22}, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$1_P^G: \begin{array}{c|cccccccc} \dim & 1 & 21 & 55 & 99 & 154 & 210 & 230 & 385 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 2_1 & 3_1 & 2_2 & 4_1 & 1_2 & 3_2 & 4_2 \end{array}$$

$k_P^G$	1	848	1078	616 <sub>1</sub>	616 <sub>2</sub>	230	76
1	1	12	14	8	8	4	2
10 <sub>1</sub>		5	6	3	3	3	2
10 <sub>2</sub>		5	6	3	3	3	2
34		6	8	5	5	2	1
70 <sub>1</sub>		1	2	2	2		
70 <sub>2</sub>		1	2	2	2		
98		4	4	1	1	1	
soc	1	98	34 $\oplus$ 98	70 <sub>1</sub>	70 <sub>2</sub>	10 <sub>1</sub> $\oplus$ 34	10 <sub>2</sub>

Wir verzichten aus Platzgründen auf das Symbol  $\oplus$  in den Sockeln des Endomorphismenrings.

$C_P^G$	1	11	20	7 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	9	5
1 <sub>1</sub>	1						
1 <sub>2</sub>		4	4	1	1	1	
1 <sub>3</sub>		4	8	2	2	3	1
1 <sub>4</sub>		1	2	2	2		
1 <sub>5</sub>		1	2	2	2		
1 <sub>6</sub>		1	3			3	2
1 <sub>7</sub>			1			2	2
$k_P^G$	1	848	1078	616 <sub>1</sub>	616 <sub>2</sub>	230	76
2 <sup>x</sup>	2 <sup>0</sup>	2 <sup>4</sup>	2	2 <sup>3</sup>	2 <sup>3</sup>	2	2 <sup>2</sup>
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub> 1 <sub>5</sub> 1 <sub>2</sub> <sup>2</sup> 1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>3</sub> 1 <sub>7</sub> 1 <sub>2</sub>	1 <sub>6</sub> 1 <sub>7</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>

**Bemerkung:** Alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  sind Gewicht-Green-Korrespondenten. Das steht im Einklang mit der Vermutung aus Abschnitt 5.3, denn die Sockel der sieben PIMs liefern insgesamt auch sieben verschiedene Isomorphietypen von einfachen  $\mathfrak{C}^k$ -Moduln.

Der Gewichts-Green-Korrespondent 848 hat Vertex  $Q_1$  der Ordnung 8. Für die Induktion des zugehörigen Gewichtsmoduls nach  $G$  gilt

$${}^8S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{848} \oplus 896_1 \oplus 896_2.$$

Die beiden Gewichts-Green-Korrespondenten  $616_1$  und  $616_2$  haben Vertizes  $Q_2$  der Ordnung 16. Für die Induktionen gilt:

$$\begin{aligned} {}^{8_1}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{616_1}, \\ {}^{8_2}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{616_2}. \end{aligned}$$

Der direkte Summand 76 hat Vertex  $Q_3$  der Ordnung  $2^5$ . Die Induktion des entsprechenden Gewichtsmoduls nach  $G$  ergibt:

$${}^2S_{N(Q_3)}^G = \mathbf{76} \oplus 896_1 \oplus 896_2 \oplus 848 \oplus 1904.$$

Die direkten Summanden 230 und 1078 haben Vertizes der Ordnung  $2^6$ , die aber nicht untereinander konjugiert sind. Die Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$  liefern:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_4)}^G &= \mathbf{230} \oplus 616_1 \oplus 616_2 \oplus 848, \\ {}^2S_{N(Q_5)}^G &= \mathbf{1078} \oplus 616_1 \oplus 616_2. \end{aligned}$$

Für den trivialen Modul gilt wegen  $N_G(P) = P$

$${}^1S_N^G = k_P^G.$$


---



---

**5.6.13**  $G = U_3(3)$

$$G = U_3(3), P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

$$1_P^G : \frac{\text{dim}}{\text{VFH}} \begin{array}{c|cccccc} 1 & 7_1 & 7_2 & 14 & 21 & 27 & 32_1 & 32_2 \\ \hline 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2_1 & 2_2 & 1_5 & 1_6 \end{array}$$

$$p = 2, G = U_3(3), P \in \text{Syl}_2(G), N_G(P) = P, |G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$k_P^G$	$32_1$	$32_2$	$1$	$62_1$	$62_2$	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$5$	$6$
$32_1$	1					$1_1$	1				
$32_2$		1				$1_2$		1			
$1$			1	2	4	$1_3$			1		
$6$				3	5	$1_4$				3	2
$14$				3	2	$1_5$				2	4
soc	$32_1$	$32_2$	$1$	$14$	$6$	$k_P^G$	<b><math>32_1</math></b>	<b><math>32_2</math></b>	<b><math>1</math></b>	<b><math>62_1</math></b>	<b><math>62_2</math></b>
						$2^x$	$2^5$	$2^5$	$2^0$	$2$	$2$
						soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5^2$
						hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$

**Beachte:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten der PIMs im Endomorphismenring zeigt, dass der Ring nicht quasi-Frobenius ist.

$D_N^G$	<b><math>32_1</math></b>	<b><math>32_2</math></b>	<b><math>1</math></b>	<b><math>62_1</math></b>	<b><math>62_2</math></b>	
$32_1$	1					$1_5$
$32_2$		1				$1_6$
$1$			1			$1_1$
$7_1$					1	$1_2$
$7_2$					1	$1_3$
$14$				1		$1_4$
$21$				1	1	$2_1$
$27$				1	1	$2_2$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	

$IT = [1, 1]$

**Bemerkung:** Jeder PIM des Endomorphismenrings hat einen einfachen Sockel und einen anderen Isomphietyp als Sockelkonstituent. Wie erwartet ist demnach jeder unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$  der Green-Korrespondent eines Gewichtsmoduls. Damit bestätigt sich die Vermutung aus Abschnitt 5.3.

Die beiden unzerlegbaren direkten Summanden  $32_1$  und  $32_2$  sind projektiv einfache  $kG$ -Moduln. Die beiden unzerlegbaren direkten Summanden  $62_1$  und  $62_2$  haben nicht konjugierte Vertizes der Ordnung 16. Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^2S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{62}_2 \oplus 32_1 \oplus 32_2, \\ {}^2S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{62}_1 \oplus 32_1 \oplus 32_2. \end{aligned}$$

Da  $N_G(P) = P$  gilt, folgt für den trivialen Gewichtsmodule  ${}^1S_N^G = k_P^G$ .

$$G = U_3(3), P \in \text{Syl}_3(G), N_G(P) = P, |G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

$$1_P^G: \begin{array}{c|cccccccccc} \dim & 1 & 7_1 & 7_2 & 7_3 & 21_1 & 21_2 & 21_3 & 27 & 28_1 & 28_2 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7 & 1_8 & 2_1 & 2_2 \end{array}$$

$$p = 3, G = U_3(3), P \in \text{Syl}_3(G), N_G(P) = P, |G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$k_P^G$	27	1	$28_1$	$28_2$	$28_3$	$28_4$	$28_5$	$28_6$	$28_7$
27	1								
1		1					2	1	1
$3_1$			1	1	1	1			
$3_2$			1	1	1	1			
7			1	1	1	1	1		
$15_1$			1	1				1	
$15_2$					1	1			1
$6_1$							1	2	
$6_2$							1		2
soc	27	1	$3_1$	$15_1$	$15_2$	$3_2$	7	$6_1$	$6_2$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$2_5$	$2_6$	$2_7$
$1_1$	1								
$1_2$		1							
$1_3$			1	1					
$1_4$			1	1					
$1_5$					1	1			
$1_6$					1	1			
$1_7$							2		
$1_8$								2	
$1_9$									2
$k_P^G$	<b>27</b>	<b>1</b>	<b>28<sub>1</sub></b>	<b>28<sub>2</sub></b>	<b>28<sub>3</sub></b>	<b>28<sub>4</sub></b>	<b>28<sub>5</sub></b>	<b>28<sub>6</sub></b>	<b>28<sub>7</sub></b>
$3^x$	$3^3$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^0$	$3^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_4$	$1_3$	$1_6$	$1_5$	$1_7$	$1_8$	$1_9$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$

**Beachte:** Weil  $U_3(3)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Allerdings zeigen die Diagonaleinträge  $c_{3,3}$ ,  $c_{4,4}$ ,  $c_{5,5}$  und  $c_{6,6}$ , dass  $\mathfrak{E}^k$  nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>27</b>	<b>1</b>	<b>28<sub>1</sub></b>	<b>28<sub>2</sub></b>	<b>28<sub>3</sub></b>	<b>28<sub>4</sub></b>	<b>28<sub>5</sub></b>	<b>28<sub>6</sub></b>	<b>28<sub>7</sub></b>	
$27$	1									$1_1$
$1$		1								$1_2$
$28_1$			1	1						$2_1$
$28_2$					1	1				$2_2$
$7_1$							1			$1_3$
$21_1$							1			$1_4$
$7_2$								1		$1_5$
$21_2$								1		$1_6$
$7_3$									1	$1_7$
$21_3$									1	$1_8$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$	

**Bemerkung:** Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Der unzerlegbare direkte Summand  $27$  ist projektiv einfach. Alle übrigen unzerlegbaren direkten Summanden haben eine 3-Sylowgruppe als Vertex. Für die

Induktionen der entsprechenden Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned}
 {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 27, \\
 {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{28}_5, \\
 {}^1_3 S_N^G &= \mathbf{28}_1, \\
 {}^1_4 S_N^G &= \mathbf{28}_3, \\
 {}^1_5 S_N^G &= \mathbf{28}_6, \\
 {}^1_6 S_N^G &= \mathbf{28}_7, \\
 {}^1_7 S_N^G &= \mathbf{28}_4, \\
 {}^1_8 S_N^G &= \mathbf{28}_2.
 \end{aligned}$$

$$G = U_3(3), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

$${}^1_P^G : \begin{array}{c|cccccccccccccc}
 \dim & 1 & 7_1 & 7_2 & 7_3 & 14 & 21_1 & 21_2 & 21_3 & 27 & 28_1 & 28_2 & 32_1 & 32_2 \\
 \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 2_1 & 3_1 & 3_2 & 3_3 & 3_4 & 4_1 & 4_2 & 5_1 & 5_2
 \end{array}$$

$$p = 7, G = U_3(3), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	7 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>3</sub>	14 <sup>2</sup>	21 <sub>1</sub> <sup>3</sup>	21 <sub>2</sub> <sup>3</sup>	21 <sub>3</sub> <sup>3</sup>	28 <sub>1</sub> <sup>4</sup>	28 <sub>2</sub> <sup>4</sup>	64 <sub>1</sub>	64 <sub>2</sub>	91 <sup>3</sup>
1	1												1
7 <sub>1</sub>		1											
7 <sub>2</sub>			1										
7 <sub>3</sub>				1									
14					1								
21 <sub>1</sub>						1							
21 <sub>2</sub>							1						
21 <sub>3</sub>								1					
28 <sub>1</sub>									1				
28 <sub>2</sub>										1			
6											2	2	2
26											2	2	3
soc	1	7 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>3</sub>	14	21 <sub>1</sub>	21 <sub>2</sub>	21 <sub>3</sub>	28 <sub>1</sub>	28 <sub>2</sub>	6	26	26

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$4_1$	$4_2$	$10_1$	$10_2$	$13^3$
$1_1$	1												
$1_2$		1											
$1_3$			1										
$1_4$				1									
$2$					1								
$3_1$						1							
$3_2$							1						
$3_3$								1					
$4_1$									1				
$4_2$										1			
$1_5$											2	2	2
$1_6$											2	2	2
$3_4$											2	2	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>7<sub>1</sub></b>	<b>7<sub>2</sub></b>	<b>7<sub>3</sub></b>	<b>14</b>	<b>21<sub>1</sub></b>	<b>21<sub>2</sub></b>	<b>21<sub>3</sub></b>	<b>28<sub>1</sub></b>	<b>28<sub>2</sub></b>	<b>64<sub>1</sub></b>	<b>64<sub>2</sub></b>	91
$7^x$	$7^0$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$7^0$	$7^0$	7
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	2	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$4_1$	$4_2$	$1_6$	$3_4$	$3_4$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	2	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$4_1$	$4_2$	$1_5$	$1_6$	$3_4$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Sockelkonstituenten zeigt, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und somit auch nicht symmetrisch ist.

$D_P^G$	<b>1</b>	<b>7<sub>1</sub></b>	<b>7<sub>2</sub></b>	<b>7<sub>3</sub></b>	<b>14</b>	<b>21<sub>1</sub></b>	<b>21<sub>2</sub></b>	<b>21<sub>3</sub></b>	<b>28<sub>1</sub></b>	<b>28<sub>2</sub></b>	<b>64<sub>1</sub></b>	<b>64<sub>2</sub></b>	91	
1	1													$1_1$
$7_1$		1												$1_2$
$7_2$			1											$1_3$
$7_3$				1										$1_4$
14					1									2
$21_1$						1								$3_1$
$21_2$							1							$3_2$
$21_3$								1						$3_3$
$28_1$									1					$4_1$
$28_2$										1				$4_2$
27													1	$3_3$
$32_1$											1	1	1	$5_1$
$32_1$											1	1	1	$5_2$
	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	2	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$4_1$	$4_2$	$1_5$	$1_6$	3	

**Bemerkung:** Die PIMs  $10_2$  und  $13$  bilden eine Äquivalenzklasse mit nur einem Sockelkonstituenten. Dabei ist der zu  $10_2$  korrespondierende unzerlegbare direkte Summand  $64_2$  ein Gewichts-Green-Korrespondent, der zu  $13$  korrespondierende direkte Summand  $91$  jedoch nicht. Beachte, dass  $7$  ein Teiler von  $91$  aber nicht

von 64 ist. Damit bestätigen sich die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3

Alle anderen nicht-trivialen unzerlegbaren direkten Summanden sind projektiv einfach. Die Summanden  $64_1$  und  $64_2$  haben eine 7-Sylowgruppe als Vertex. Für die Induktionen der jeweiligen Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1 S_N^G &= \mathbf{64}_1 \oplus 14 \oplus 21_1 \oplus 21_2 \oplus 21_3 \oplus 28_1 \oplus 28_2 \oplus 91, \\ {}^2 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 7_1 \oplus 7_2 \oplus 7_3 \oplus 21_1 \oplus 21_2 \oplus 21_3 \oplus 28_1^2 \oplus 28_2^2, \\ {}^3 S_N^G &= \mathbf{64}_2 \oplus 14 \oplus 21_1 \oplus 21_2 \oplus 21_3 \oplus 28_1 \oplus 28_2 \oplus 91. \end{aligned}$$

---

---

5.6.14  $G = J_2$ 

$$G = J_2, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Konstituenten des Permutationscharakters:

dim	1	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	36	63	90	126	160	175	224 <sub>1</sub>	224 <sub>2</sub>	288	300	336
VFH	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2 <sub>1</sub>	3 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	4 <sub>1</sub>	2 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	3 <sub>2</sub>	2 <sub>4</sub>	4 <sub>2</sub>

$$p = 2, G = J_2, P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	154	364	525 <sub>1</sub>	525 <sub>2</sub>	762 <sub>1</sub>	762 <sub>2</sub>	160	288 <sub>1</sub>	288 <sub>2</sub>	896
1	1	2	8	9	9	10	10				
6 <sub>1</sub>		2	6	6	6	7	7				
6 <sub>2</sub>		2	6	6	6	7	7				
14 <sub>1</sub>		2	2	3	3	5	5				
14 <sub>2</sub>		2	2	3	3	5	5				
36		2	4	3	3	3	3				
84			1	3	3	5	5				
64 <sub>1</sub>									1	1	2
64 <sub>2</sub>									1	1	2
160								1	1	1	4
soc	1	14 <sub>1</sub> ⊕ 14 <sub>2</sub> ⊕ 36	36	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	84	84	160	64 <sub>1</sub>	64 <sub>2</sub>	160

Wir verzichten aus Platzgründen auf ⊕ zwischen den Sockelkonstituenten.

$C_P^G$	1	6	8	10 <sub>1</sub>	10 <sub>2</sub>	11 <sub>1</sub>	11 <sub>2</sub>	2	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	7
1 <sub>1</sub>	1										
1 <sub>2</sub>		4	2								
1 <sub>3</sub>		2	4			1	1				
1 <sub>4</sub>				3	3	2	2				
1 <sub>5</sub>				3	3	2	2				
1 <sub>6</sub>			1	2	2	3	3				
1 <sub>7</sub>			1	2	2	3	3				
1 <sub>8</sub>								1	1	1	1
1 <sub>9</sub>								1	1	1	1
1 <sub>10</sub>									1	1	1
1 <sub>11</sub>											4
$k_P^G$	1	154	364	762 <sub>1</sub>	762 <sub>2</sub>	525 <sub>1</sub>	525 <sub>2</sub>	160	288 <sub>1</sub>	288 <sub>2</sub>	896
2 <sup>x</sup>	2 <sup>0</sup>	2	2 <sup>2</sup>	2	2	2 <sup>0</sup>	2 <sup>0</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>7</sup>
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub> <sup>2</sup> 1 <sub>3</sub>	1 <sub>3</sub> 1 <sub>6</sub> 1 <sub>7</sub>	1 <sub>4</sub> 1 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub> 1 <sub>5</sub>	1 <sub>3</sub> 1 <sub>4</sub> 1 <sub>6</sub> 1 <sub>7</sub>	1 <sub>3</sub> 1 <sub>5</sub> 1 <sub>6</sub> 1 <sub>7</sub>	1 <sub>11</sub>	1 <sub>10</sub> 1 <sub>11</sub>	1 <sub>9</sub> 1 <sub>11</sub>	1 <sub>11</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>

$D_P^G$	1	154	364	525 <sub>1</sub>	525 <sub>2</sub>	762 <sub>1</sub>	762 <sub>2</sub>	160	288 <sub>1</sub>	288 <sub>2</sub>	896	
1	1											1 <sub>1</sub>
14 <sub>1</sub>		1										1 <sub>2</sub>
14 <sub>2</sub>		1										1 <sub>3</sub>
36		1	1									2 <sub>1</sub>
63			1	1	1							3 <sub>1</sub>
90		1	1									2 <sub>2</sub>
126				1	1	1	1					4 <sub>1</sub>
175			1									1 <sub>4</sub>
300						1	1					2 <sub>4</sub>
336				1	1	1	1					4 <sub>2</sub>
160								1				2 <sub>3</sub>
224 <sub>1</sub>										1		1 <sub>5</sub>
224 <sub>2</sub>										1		1 <sub>6</sub>
288									1	1	1	3 <sub>2</sub>
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	

**Bemerkung:** Die Sockelkonstituenten zeigen, dass der Endomorphismenring nicht quasi-Frobenius und folglich auch nicht symmetrisch ist.

Wir benutzen die Ergebnisse aus M. Szökes Dissertation ([Szö98]), wonach alle direkten Summanden von  $k_P^G$  Gewichts-Green-Korrespondenten sind, außer 896. Die PIMs 8, 10<sub>1</sub>, 10<sub>2</sub>, 11<sub>1</sub>, 11<sub>2</sub> bilden eine Äquivalenzklasse, die fünf Sockelkonstituenten hervorbringt. Alle dazu korrespondierenden direkten Summanden von  $k_P^G$  sind Gewichts-Green-Korrespondenten. Die PIMs 2, 3<sub>1</sub>, 3<sub>2</sub> und 7 bilden eine weitere Äquivalenzklasse mit drei zugehörigen Sockelkonstituenten. Nur 896, dessen Dimension von der höchsten 2-Potenz geteilt wird, ist kein Gewichts-Green-Korrespondent. Dies steht im Einklang mit der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3.

### 5.6.15 $G = L_2(49)$

$$p = 2, G = L_2(49), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$k_P^G$	1	$48_i^3$	$124_1$	$124_2$	$200^2$	$224_1$	$224_2$	$400^2$	50
soc	1	$48_i$	$24_1$	$24_2$	50	$24_1$	$24_2$	50	50

mit  $1 \leq i \leq 7$ .

$C_P^G$	1	$3_i^3$	$10_1$	$10_2$	$14_1$	$14_2$	$17^2$	$25^2$	5
$1_1$	1								
$3_i$		1							
$1_2$			3	2	3	2			
$1_3$			2	3	2	3			
$1_4$			3	2	5	4			
$1_5$			2	3	4	5			
$2_1$							4	4	1
$2_2$							4	8	1
$1_6$							1	1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>48_i</math></b>	<b><math>124_1</math></b>	<b><math>124_2</math></b>	200	$224_1$	$224_2$	400	<b>50</b>
$2^x$	$2^0$	$2^4$	$2^2$	$2^2$	$2^3$	$2^5$	$2^5$	$2^4$	2
soc	$1_1$	$3_i$	$1_4$	$1_5$	$1_4$	$1_5$	$2_2$	$2_2$	$2_2$
hd	$1_1$	$3_i$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$2_1$	$2_2$	$21_6$

**Bemerkung:** Die Dimensionen der unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  verraten sofort, dass  $224_i$  und 400 nach Lemma 3.3.14 keine Gewichts-Green-Korrespondenten sein können. Der Gewichts-Green-Korrespondent 50 hat Vertizes der Ordnung 8. Der korrespondierende PIM 5 bildet zusammen mit den PIMs 25 und 17 eine Äquivalenzklasse, die genau einen Sockelkonstituenten liefert. Der PIM 25 bzw. 17 korrespondiert wiederum zum direkten Summanden 400 bzw. 224, die keine Gewichts-Green-Korrespondenten sind. Für die Induktion des zu 50 korrespondierenden Gewichtsmoduls gilt:

$${}^2S_N^G = \mathbf{50} \oplus 224_1 \oplus 224_2 \oplus 400^2 \oplus_{1 \leq i \leq 12} 48_i^2.$$

Die Untersuchung der Gruppen  $N_G(Q)$  für alle möglichen 2-Untergruppen von  $G$  zeigt zudem, dass es noch zwei Gewichtsmoduln mit Vertizes der Ordnung 4 gibt, deren Vertizes aber untereinander nicht konjugiert sind. Daher können nach Lemma 3.3.14 nur noch  $124_1$  und  $124_2$ , deren Dimension ja genau von  $2^2$  geteilt wird, die übrigen nicht projektiv einfachen Gewichts-Green-Korrespondenten sein. Daher bestätigen sich insgesamt die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 auch an diesem Beispiel.

$$p = 5, G = L_2(49), P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$k_P^G$	1	$25_1$	$25_2$	$50_i^2$	576	625
1	1					1
$25_1$		1				
$25_2$			1			
$50_i$				1		
48					12	13
soc	1	$25_1$	$25_2$	$50_i$	48	48

wobei  $1 \leq i \leq 11$  gilt.

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i^2$	24	25
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			1			
$2_i$				1		
$1_4$					12	12
$1_5$					12	13
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>25_1</math></b>	<b><math>25_2</math></b>	<b><math>50_i</math></b>	<b>576</b>	625
$5^x$	$5^0$	$5^2$	$5^2$	$5^2$	$5^0$	$5^4$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$1_4$	$1_4$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$1_4$	$1_5$

wobei  $1 \leq i \leq 11$  gilt.

**Bemerkung:** Wir finden fünfzehn Gewichte für  $G$  modulo 5. Darunter sind zwei Defekt-0-Moduln der Dimension 25 und elf Defekt-0-Moduln der Dimension 50. Die beiden anderen Gewichtsmodule haben Dimension 1 und Vertex  $P$ . Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 25_1 \oplus 25_2 \oplus_{1 \leq i \leq 5} 50_i^2 \oplus 625, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{576} \oplus_{6 \leq i \leq 11} 50_i^2. \end{aligned}$$

Der Sockel des PIMs 25 von  $\mathfrak{E}^k$  ist isomorph zum Sockel des PIMs 24. Letzterer korrespondiert zum direkten Summanden 576 von  $k_P^G$  und ist ein Gewicht-Green-Korrespondent, dessen Dimension nicht von 5 geteilt wird. Der PIM 25 korrespondiert hingegen zum Summanden 625, der kein Gewicht-Green-Korrespondent ist und dessen Dimension durch  $5^4$  teilbar ist. Insgesamt werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 an diesem Beispiel bestätigt.

$$p = 7, G = L_2(49), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$k_P^G = 1 \oplus 49 \oplus_{1 \leq i \leq 23} 50_i$$

Für die Zerlegung des Endomorphismenrings  $\mathfrak{E}^k$  ergibt sich:

$$\text{End}_{kG}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus_{1 \leq i \leq 23} 2_i,$$

wobei die PIMs  $2_i$  für  $1 \leq i \leq 22$  paarweise von der Form

$$\begin{array}{cc} 1_{2j-1} & 1_{2j} \\ 1_{2j} & 1_{2j-1} \end{array}$$

mit  $2 \leq j \leq 12$  sind. Der PIM  $2_{23}$  ist von der Form  $\begin{array}{c} 1_{23} \\ 1_{23} \end{array}$ . Weil  $L_2(49)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist  $\mathfrak{E}^k$  nach Satz 3.4.8 quasi-Frobenius. Daher bilden alle PIMs einelementige Äquivalenzklassen. Andererseits ergibt die Untersuchung von  $N_G(Q)/Q$  für alle möglichen 7-Gruppen, dass es fünfundzwanzig Gewichtsmoduln gibt. Daher wird die Vermutung auch hier bestätigt (vergleiche auch Bemerkung nach Satz 3.4.5).

---



---

**5.6.16**  $G = L_2(8)$ 

$$p = 2, G = L_2(8), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	8	$9_1$	$9_2$	$9_3$	$9_4$	$9_5$	$9_6$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1						
$2_1$			1	1			1	1
$2_2$			1	1	1	1		
$2_3$					1	1	1	1
$4_1$			1	1				
$4_2$					1	1		
$4_3$							1	1
soc	1	8	$2_1$	$4_1$	$2_2$	$4_2$	$2_3$	$4_3$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$2_5$	$2_6$
$1_1$	1							
$1_2$		1						
$1_3$			1	1				
$1_4$			1	1				
$1_5$					1	1		
$1_6$					1	1		
$1_7$							1	1
$1_8$							1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>8</b>	<b><math>9_1</math></b>	<b><math>9_2</math></b>	<b><math>9_3</math></b>	<b><math>9_4</math></b>	<b><math>9_5</math></b>	<b><math>9_6</math></b>
$2^x$	$2^0$	$2^3$	$2^0$	$2^0$	$2^0$	$2^0$	$2^0$	$2^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_4$	$1_3$	$1_6$	$1_5$	$1_8$	$1_7$

**Bemerkung:** Es ist  $L_2(8)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik. Daher ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius. Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

$$p = 3, G = L_2(8), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$k_P^G$	1	$9_1$	$9_2$	$9_3$	28
1	1				
$9_1$		1			
$9_2$			1		
$9_3$				1	
7					4
soc	1	$9_1$	$9_2$	$9_3$	7

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	4
$1_1$	1				
$1_2$		1			
$1_3$			1		
$1_4$				1	
$1_5$					4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>9_1</math></b>	<b><math>9_2</math></b>	<b><math>9_3</math></b>	<b>28</b>
$3^x$	$3^0$	3	3	3	$3^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$

**Bemerkung:** Wegen  $L_2(8) \cong {}^2G_2(3)$  ist  $L_2(8)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik. Daher ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius. Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

In allen folgenden Beispielen liegt der Schwerpunkt auf der Bestätigung der Vermutung aus Abschnitt 5.3. Daher wird ab jetzt nur noch die Zerlegung von  $k_P^G$  in unzerlegbare direkte Summanden angegeben, ohne diese noch weiter in ihre Konstituenten zu zerlegen.

### 5.6.17 $G = L_2(11)$

$$p = 2, G = L_2(11), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$k_P^G = 1 \oplus 12_1^3 \oplus 12_2^3 \oplus 16_1 \oplus 5_1 \oplus 16_2 \oplus 5_2 \oplus 20 \oplus 10^3.$$

$C_P^G$	1	$3_1^3$	$3_2^3$	$4_1$	$2_1$	$4_2$	$2_2$	5	$4_3^3$
$1_1$	1								
$3_1$		1							
$3_2$			1						
$1_2$				2	1	1			
$1_3$				1	1				
$1_4$				1		2	1		
$1_5$						1	1		
$1_6$								2	1
$3_3$								1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>12_1</math></b>	<b><math>12_2</math></b>	<b><math>16_1</math></b>	<b><math>5_1</math></b>	<b><math>16_2</math></b>	<b><math>5_2</math></b>	<b>20</b>	<b>10</b>
$2^x$	$2^0$	$2^2$	$2^2$	$2^4$	$2^0$	$2^4$	$2^0$	$2^2$	2
soc	1	$3_1$	$3_2$	$1_2$	$1_2$	$1_4$	$1_4$	$1_6$	$1_6$
hd	$1_1$	$3_1$	$3_2$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$3_3$

**Bemerkung:** Die Äquivalenzklassen  $\{4_i, 2_i\}$  für  $i = 1, 2$  und  $\{5, 4_3\}$  von PIMs von  $\mathfrak{C}^k$  liefern nur einen Konstituenten im Sockel. Gemäß der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 sind die korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  Gewichts-Green-Korrespondenten, deren Dimension im Vergleich zum direkten Summanden bzgl. des PIM-Partners von einer niedrigeren 2-Potenz geteilt wird.

So gibt es neben den projektiv einfachen Gewichts-Moduln  $12_1$  und  $12_2$  noch vier weitere Gewichtsmoduln. Der Gewichts-Green-Korrespondent 10 hat Vertex  $Q_1$  der Ordnung 2 und wird als Gewichts-Green-Korrespondent durch folgende Zerlegung bestätigt:

$${}^2S_{N_G(Q_1)}^G = \mathbf{10} \oplus 12_1^2 \oplus 12_2^2 \oplus 16_1 \oplus 16_2 \oplus 20.$$

Die übrigen Gewichts-Green-Korrespondenten  $1, 5_1, 5_2$  haben eine 2-Sylowgruppe als Vertex. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 10 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 20, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{5}_1 \oplus 10 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 16_1, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{5}_2 \oplus 10 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 16_2. \end{aligned}$$

$$p = 3, G = L_2(11), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$k_P^G = 1 \oplus 12_1^4 \oplus 12_2^4 \oplus 10_1 \oplus 15_1 \oplus 10_2 \oplus 15_2 \oplus 21^3 \oplus 10_3$$

$C_P^G$	1	$4_1^4$	$4_2^4$	$4_3$	$5_1$	$4_4$	$5_2$	$7^3$	$4_5$
$1_1$	1								
$4_1$		1							
$4_2$			1						
$1_2$				1	1	1	1		
$1_3$				1	2	1	1		
$1_4$				1	1	1	1		
$1_5$				1	1	1	2		
$3$								2	1
$1_6$								1	1
$k_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{12}_1$	$\mathbf{12}_2$	$\mathbf{10}_1$	$\mathbf{15}_1$	$\mathbf{10}_2$	$\mathbf{15}_2$	$\mathbf{21}$	$\mathbf{10}_3$
$3^x$	$3^0$	3	3	$3^0$	3	$3^0$	3	3	$3^0$
soc	$1_1$	$4_1$	$4_2$	$1_5$	$1_3$	$1_3$	$1_5$	3	3
hd	$1_1$	$4_1$	$4_2$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	3	$1_6$

**Bemerkung:** Die PIMs  $4_3, 5_2$  und  $4_4, 5_3$  sowie  $4_4, 7$  bilden jeweils eine Äquivalenzklasse. Dabei ist gemäß der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 derjenige korrespondierende direkte Summand von  $k_P^G$  ein Gewichts-Green-Korrespondent, dessen Dimension von der niedrigsten 3-Potenz unter den korrespondierenden Summanden der Äquivalenzklasse geteilt wird. Die direkten Summanden  $12_1$  und  $12_2$  von  $k_P^G$  sind projektiv einfache Gewichtsmoduln. Alle anderen Gewichtsmoduln haben eine 3-Sylowgruppe als Vertex und es ergeben sich fol-

gende Induktionen der Gewichtsmoduln nach  $G$ :

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 15_1 \oplus 15_2, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{10}_1 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 21, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{10}_2 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 21, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{10}_3 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 21. \end{aligned}$$

---



---


$$p = 5, G = L_2(11), P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$k_P^G = 1 \oplus 5_1 \oplus 5_2 \oplus 10_1^2 \oplus 10_2^2 \oplus 11 \oplus 35^2$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1^2$	$2_2^2$	$3$	$7^2$
$1_1$	1						
$1_2$		1					
$1_3$			1				
$2_1$				1			
$2_2$					1		
$1_4$						1	1
$2_3$						1	3
$k_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{5}_1$	$\mathbf{5}_2$	$\mathbf{10}_1$	$\mathbf{10}_2$	$\mathbf{11}$	$\mathbf{35}$
$5^x$	$5^0$	5	5	5	5	$5^0$	5
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_3$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$1_4$	$2_3$

**Bemerkung:** Die direkten Summanden  $5_i$  und  $10_i$  von  $k_P^G$  sind projektiv einfache Gewichtsmoduln. Die beiden PIMs 3, 11 bilden eine Äquivalenzklasse von PIMs, die nur einen Konstituenten liefert. Der zu 3 korrespondierende direkte Summand 11 ist ein Gewichtsmodul, der zu 11 korrespondierende Summand 35 nicht. Damit werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Für die Induktion der Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{11} \oplus 35 \oplus 10_1^2, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 5_1 \oplus 5_2 \oplus 10_2^2 \oplus 35. \end{aligned}$$

Insbesondere ist 35 ein projektiver  $kG$ -Modul.

$$p = 11, G = L_2(11), P \in \text{Syl}_{11}(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$k_P^G = 1 \oplus 11 \oplus 12_1 \oplus 12_2 \oplus 12_3 \oplus 12_4$$

$C_P^G$	1	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	2 <sub>3</sub>	2 <sub>4</sub>
1 <sub>1</sub>	1					
1 <sub>2</sub>		1				
1 <sub>3</sub>			1	1		
1 <sub>4</sub>			1	1		
1 <sub>5</sub>					1	1
1 <sub>6</sub>					1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>11</b>	<b>12<sub>1</sub></b>	<b>12<sub>2</sub></b>	<b>12<sub>3</sub></b>	<b>12<sub>4</sub></b>
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>5</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>

Weil  $L_2(11)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{C}^k$  quasi-Frobenius. Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

**5.6.18**  $G = L_2(13)$

$$p = 2, G = L_2(13), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

$$1_P^G : \begin{array}{c|cccccccccc} \dim & 1 & 7_1 & 7_2 & 12_1 & 12_2 & 12_3 & 13 & 14_1 & 14_2 \\ \hline \text{VFH} & 1_1 & 1_2 & 1_3 & 3_1 & 3_2 & 3_3 & 4 & 5 & 2 \end{array}$$

$k_P^G$	1	$12_1^3$	$12_2^3$	$12_3^3$	$20_1$	$13_1$	$20_2$	$13_2$	$28^2$	$14^3$
1	1				2	1	2	1		
$12_1$		1								
$12_2$			1							
$12_3$				1						
$6_1$					2	1	1	1		
$6_2$					1	1	2	1		
14									2	1
soc	1	$12_1$	$12_2$	$12_3$	$6_1$	$6_1$	$6_2$	$6_2$	14	14
hd	1	$12_1$	$12_2$	$12_3$	$6_1$	$6_2$	$6_2$	$6_1$	14	14

$C_P^G$	1	$3_1^3$	$3_2^3$	$3_3^3$	$5_1$	$4_1$	$5_2$	$4_2$	$7^2$	$5_3^3$
$1_1$	1									
$3_1$		1								
$3_2$			1							
$3_3$				1						
$1_2$					2	1	1	1		
$1_3$					1	1	1	1		
$1_4$					1	1	2	1		
$1_5$					1	1	1	1		
2									2	1
$3_4$									1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>12_1</math></b>	<b><math>12_2</math></b>	<b><math>12_3</math></b>	<b><math>20_1</math></b>	<b><math>13_1</math></b>	<b><math>20_2</math></b>	<b><math>13_2</math></b>	<b>28</b>	<b>14</b>
$2^x$	$2^0$	$2^2$	$2^2$	$2^2$	$2^2$	$2^0$	$2^2$	$2^0$	$2^2$	2
soc	$1_1$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$1_2$	$1_2$	$1_4$	$1_4$	2	2
hd	$1_1$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	2	$3_4$

**Bemerkung:** Es gibt sieben Gewichtsmoduln. Die direkten Summanden  $12_i$  für  $1 \leq i \leq 3$  sind projektiv einfache Gewichtsmoduln. Die PIMs  $4_1, 5_1$  und  $4_2, 5_2$  sowie  $5_3, 7$  bilden jeweils zweielementige Äquivalenzklassen. Dabei liefert jede Klasse einen Sockelkonstituenten. Der Vergleich mit den korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  zeigt, dass in jeder Klasse ein PIM zu einem Gewichts-Green-Korrespondenten gehört, der auch die Beobachtung bzgl. der Dimensionen in Abschnitt 5.3 bestätigt.

So hat 14 einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung 2. Die Induktion des entsprechenden Gewichtsmoduls ergibt:

$${}^2S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{14} \oplus 20_1 \oplus 20_2 \oplus 28^2 \oplus 36^2.$$

Insbesondere sind die unzerlegbaren direkten Summanden  $20_1, 20_2$  und  $28$  projektiv.

Die Gewichts-Green-Korrespondenten  $1, 13_1, 13_2$  haben eine 2-Sylowgruppe als Vertex. Für die Induktionen der korrespondierenden Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 14 \oplus 20_1 \oplus 20_2 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{13}_1 \oplus 14 \oplus 28 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{13}_2 \oplus 14 \oplus 28 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i. \end{aligned}$$

$$p = 3, G = L_2(13), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

$k_P^G$	$\mathbf{1}$	$12_1^4$	$12_2^4$	$12_3^4$	$7_1$	$7_2$	$13$	$21_1^2$	$21_2^2$	$27^4$
1	1									1
$12_1$		1								
$12_2$			1							
$12_3$				1						
$7_1$					1			2	1	
$7_2$						1		1	2	
13							1			2
soc	1	$12_1$	$12_2$	$12_3$	$7_1$	$7_2$	13	$7_1$	$7_2$	13
hd	1	$12_1$	$12_2$	$12_3$	$7_1$	$7_2$	13	$7_1$	$7_2$	13

$C_P^G$	$1_1$	$4_1^4$	$4_2^4$	$4_3^4$	$3_1$	$3_2$	$5$	$7_1^2$	$7_2^2$	$9^4$
$1_1$	1									
$4_1$		1								
$4_2$			1							
$4_3$				1						
$1_2$					1			1		
$1_3$						1			1	
$1_4$							1			1
$2_1$					1			2	1	
$2_2$						1		1	2	
$4_4$							1			2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>12<sub>1</sub></b>	<b>12<sub>2</sub></b>	<b>12<sub>3</sub></b>	<b>7<sub>1</sub></b>	<b>7<sub>2</sub></b>	<b>13</b>	$21_1$	$21_2$	$27$
$3^x$	$3^0$	3	3	3	$3^0$	$3^0$	$3^0$	3	3	$3^3$
soc	$1_1$	$4_1$	$4_2$	$4_3$	$2_1$	$2_2$	$4_4$	$2_1$	$2_2$	$4_4$
hd	$1_1$	$4_1$	$4_2$	$4_3$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1$	$2_2$	$4_4$

**Bemerkung:** Es gibt drei projektiv einfache Gewichtsmodule der Dimension 12. Die PIMs  $3_1, 7_1$  und  $3_2, 7_2$  sowie  $5, 9$  bilden jeweils zweielementige Äquivalenzklassen. Jede dieser Klassen liefert einen Sockelkonstituenten. Auch hier werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt, denn es gibt sieben Gewichtsmodule und in jeder Äquivalenzklasse korrespondiert genau ein PIM zu einem Gewicht-Green-Korrespondenten. Dabei ist derjenige unzerlegbare direkte Summand einer Klasse der Gewicht-Green-Korrespondent, dessen Dimension von einer niedrigeren 3-Potenz geteilt wird.

Für die Induktionen der Gewichtsmodule ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 27^2 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i, \\
 {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{13} \oplus 21_1 \oplus 21_2 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i, \\
 {}^1_3 S_N^G &= \mathbf{7}_1 \oplus 21_1 \oplus 27 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i, \\
 {}^1_4 S_N^G &= \mathbf{7}_2 \oplus 21_2 \oplus 27 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 12_i.
 \end{aligned}$$

Die letzte Induktion konnte von der MeatAxe nicht ausgeführt werden. Wir wissen aber von den vorherigen Induktionen, dass  $21_i$  und  $27$  projektive Module sein müssen, die insbesondere keine Gewichtsmodule sein können, da sie nicht einfach sind. Daher bleibt unter den direkten Summanden von  $k_P^G$  nur noch  $7_2$  als möglicher Gewicht-Green-Korrespondent. Die restlichen unzerlegbaren direkten Summanden in dieser Induktion finden wir dann ganz leicht im Vergleich der bisherigen Induktionen mit  $k_P^G$  (siehe Bemerkung 3.3.15).

$$p = 7, G = L_2(13), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

$k_P^G$	1	$7_1$	$7_2$	$14_1^2$	$14_2^2$	49	36
1	1				1		
$7_1$		1					
$7_2$			1				
$14_1$				1			
$14_2$					1		
12						4	3
soc	1	$7_1$	$7_2$	$14_1$	$14_2$	12	12
hd	1	$7_1$	$7_2$	$14_1$	$14_2$	12	12

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1^2$	$2_2^2$	7	6
$1_1$	1						
$1_2$		1					
$1_3$			1				
$2_1$				1			
$2_2$					1		
$1_4$						4	3
$1_5$						3	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>7_1</math></b>	<b><math>7_2</math></b>	<b><math>14_1</math></b>	<b><math>14_2</math></b>	49	<b>36</b>
$7^x$	$7^0$	7	7	7	7	$7^2$	$7^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$1_4$	$1_4$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$1_4$	$1_5$

**Bemerkung:** Nur die unzerlegbaren direkten Summanden 1, 36 und 49 sind nicht projektiv einfach. Die korrespondierenden PIMs der letzten beiden Moduln bilden zudem eine Äquivalenzklasse, die nur einen Sockelkonstituenten liefert. Tatsächlich ist 36 ein Gewichts-Green-Korrespondent und 49 nicht. Damit werden die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt. Konkret ergibt sich für die Induktionen der Gewichtsmodule:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{36} \oplus 7_1 \oplus 7_2 \oplus 14^2, \\ {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 14^2 \oplus 49. \end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass 49 projektiv ist.

$$p = 13, G = L_2(13), P \in \text{Syl}_{13}(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

$k_P^G$	1	13	14 <sub>1</sub>	14 <sub>2</sub>	14 <sub>3</sub>	14 <sub>4</sub>	14 <sub>5</sub>
1	1						
13		1					
5			1	1			
9			1	1			
3					1	1	
11					1	1	
7							2
soc	1	13	5	9	3	11	7
hd	1	13	9	5	11	3	7

$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	2 <sub>3</sub>	2 <sub>4</sub>	2 <sub>5</sub>
1 <sub>1</sub>	1						
1 <sub>2</sub>		1					
1 <sub>3</sub>			1	1			
1 <sub>4</sub>			1	1			
1 <sub>5</sub>					1	1	
1 <sub>6</sub>					1	1	
1 <sub>7</sub>							2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>13</b>	<b>14<sub>1</sub></b>	<b>14<sub>2</sub></b>	<b>14<sub>3</sub></b>	<b>14<sub>4</sub></b>	<b>14<sub>5</sub></b>
13 <sup>x</sup>	13 <sup>0</sup>	13	13 <sup>0</sup>				
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>7</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>

**Bemerkung:** Weil  $L_2(13)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring quasi-Frobenius. Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

**5.6.19**  $G = L_2(16)$

$$p = 2, G = L_2(16), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$$

Es gilt

$$k_P^G = 1 \oplus 16 \oplus_{1 \leq i \leq 14} 17_i,$$

wobei jeder unzerlegbare direkte Summand in dieser Zerlegung ein Gewicht-Green-Korrespondent ist.

Wir verzichten auf die Darstellung der Cartan-Matrix, und beschreiben die Zerlegung des Endomorphismenrings wie folgt:

$$\text{End}_{kG}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus_{1 \leq i \leq 14} 2_i,$$

wobei für  $2 \leq j \leq 8$  die Moduln  $2_{2j-1}, 2_{2j}$  von der Form

$$\begin{matrix} 1_{2j} & 1_{2j-1} \\ 1_{2j-1} & 1_{2j} \end{matrix}$$

sind.

Weil  $L_2(16)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^K$  quasi-Frobenius. Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

$$p = 3, G = L_2(16), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$$

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 8} 15_i^5 \oplus 16 \oplus 17_1^2 \oplus 17_2^2 \oplus 33^5 \oplus 51_1^5 \oplus 51_2^5$$

$C_P^G$	1	$5_i^5$	6	$7_1^2$	$7_2^2$	$11^5$	$17_1^5$	$17_2^5$
$1_1$	1							
$5_i$		1						
$1_2$			1			1		
$2_1$				1			1	
$2_2$					1			1
$5_5$			1			2		
$5_6$				1			3	
$5_7$					1			3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>15_i</math></b>	<b>16</b>	<b><math>17_1</math></b>	<b><math>17_2</math></b>	<b>33</b>	<b><math>51_1</math></b>	<b><math>51_2</math></b>
$3^x$	$3^0$	3	$3^0$	$3^0$	$3^0$	3	3	3
soc	$1_1$	$5_i$	$5_9$	$5_{10}$	$5_{11}$	$5_9$	$5_{10}$	$5_{11}$
hd	$1_1$	$5_i$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$5_9$	$5_{10}$	$5_{11}$

**Bemerkung:** Die PIMs  $6, 11$  und  $7_1, 17_1$  sowie  $7_2, 17_2$  bilden jeweils eine Äquivalenzklasse, deren Sockel jeweils nur einen Konstituenten liefert. Die Untersuchung von  $N_G(Q)/Q$  für die triviale Gruppe und die 3-Sylowgruppe  $Q$  zeigt, dass es 12 Gewichte gibt, von denen acht projektiv einfach sind. Die Faktorgruppe  $N_G(P)/P$  hat zwei 1-dimensionale und zwei 2-dimensionale Gewichte. Genau ein PIM in jeder der obigen Klassen korrespondiert zu einem Gewichts-Green-Korrespondenten. Insbesondere werden die Vermutung und Beobachtung in Abschnitt 5.3 bestätigt.

Obwohl nur Induktionen der beiden 1-dimensionalen Gewichtsmodule gelingen, können wir diese Aussage treffen. Denn ein Gewichtsmodule kann in diesem Fall nur eine Dimension haben, die nicht von 3 geteilt wird. In jeder Äquivalenzklasse sind aber zwei PIMs, von denen der eine korrespondierende direkte Summand von 3 geteilt wird, der andere nicht.

Für die Induktionen der 1-dimensionalen Gewichtsmodule gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 33 \oplus 51_1 \oplus 51_2, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{16} \oplus_{1 \leq i \leq 8} 15_i. \end{aligned}$$

---



---


$$p = 5, G = L_2(16), P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$$

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 15_i^3 \oplus 16 \oplus 17^2 \oplus 50^3 \oplus 85^3$$

$C_P^G$	1	$4_i$	4	$5^2$	$10^3$	$17^3$
$1_1$	1					
$4_i$		1				
$1_2$			1		1	
2				1		1
$3_1$			1		3	
$3_2$				1		5
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>15<sub>i</sub></b>	<b>16</b>	<b>17</b>	50	85
$5^x$	$5^0$	5	$5^0$	$5^0$	$5^2$	5
soc	$1_1$	$4_i$	$3_1$	$3_2$	$3_1$	$3_2$
hd	$1_1$	$4_i$	$1_2$	2	$3_1$	$3_2$

**Bemerkung:** Die PIMs 4, 10 und 5, 17 bilden jeweils Äquivalenzklassen mit nur einem Sockelkonstituenten. Die Untersuchung der Gruppen  $N_G(Q)/Q$  für die triviale Gruppe und die 5-Sylowgruppe  $P$  zeigt, dass es sieben Gewichtsmoduln gibt, wovon vier projektiv einfach sind. Die Faktorgruppe  $N_G(P)/P$  hat zwei 1-dimensionale Gewichtsmoduln und einen 2-dimensionalen Gewichtsmodul. Die Vermutungen bestätigend ist jeweils der korrespondierende direkte Summand davon ein Gewicht-Green-Korrespondent, dessen Dimension nicht von 5 geteilt wird. Nebenbei bemerkt ist klar, dass die Dimension der nicht projektiv einfachen Gewicht-Green-Korrespondenten nicht von 5 geteilt wird. Dass aber jeweils zwei direkte Summanden zu einer Äquivalenzklasse korrespondieren, wovon die Dimension des einen durch 5 geteilt wird, die andere nicht, ist ein Fakt, der unsere Vermutung bestätigt. Es gelingt rechnerisch nur die Induktion des trivialen Gewichtsmoduls:

$${}^1S_N^G = \mathbf{1} \oplus 85 \oplus 50,$$

womit ganz konkret ausgeschlossen wird, dass 85 und 50 Gewicht-Green-Korrespondenten sein können.

---

---

**5.6.20**  $G = L_2(17)$

$$p = 2, G = L_2(17), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$$

$k_P^G$	<b>16<sub>i</sub></b>	<b>1</b>	<b>44<sub>1</sub></b>	<b>44<sub>2</sub></b>	$C_P^G$	$1_i$	$1_5$	$5_1$	$5_2$
$16_i$	1				$1_i$	1			
<b>1</b>		1	4	4	$1_5$		1		
<b>8<sub>1</sub></b>			3	2	$1_6$			3	2
<b>8<sub>2</sub></b>			2	3	$1_7$			2	3
soc	$16_i$	<b>1</b>	<b>8<sub>1</sub></b>	<b>8<sub>2</sub></b>	$k_P^G$	<b>16<sub>i</sub></b>	<b>1</b>	<b>44<sub>1</sub></b>	<b>44<sub>2</sub></b>
hd	$16_i$	<b>1</b>	<b>8<sub>1</sub></b>	<b>8<sub>2</sub></b>	$2^x$	$2^4$	$2^0$	$2^2$	$2^2$
					soc	$1_i$	$1_5$	$1_6$	$1_7$
					hd	$1_i$	$1_5$	$1_6$	$1_7$

**Bemerkung:** Man kann mit Hilfe der Cartan-Matrix nicht ausschließen, dass  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius ist. Alle direkte Summanden von  $k_P^G$  sind Gewichts-Green-Korrespondenten, wie die Untersuchung von  $N_G(Q)/Q$  für alle möglichen 2-Untergruppen  $Q$  zeigt. Das steht im Einklang mit Vermutung 5.3.1, weil jeder PIM von  $\mathfrak{E}^k$  eine einelementige Äquivalenzklasse bildet.

$$p = 3, G = L_2(17), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$$

$k_P^G$	<b>1</b>	<b>9<sub>1</sub></b>	<b>9<sub>2</sub></b>	<b>18<sub>i</sub><sup>2</sup></b>	<b>81</b>	<b>64</b>	$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i^2$	$9$	$8$
<b>1</b>	1				1		$1_1$	1					
<b>9<sub>1</sub></b>		1					$1_2$		1				
<b>9<sub>2</sub></b>			1				$1_3$			1			
<b>18<sub>i</sub></b>				1			$2_1$				1		
<b>16</b>					5	4	$1_4$					5	4
soc	<b>1</b>	<b>9<sub>1</sub></b>	<b>9<sub>2</sub></b>	<b>18<sub>i</sub></b>	<b>16</b>	<b>16</b>	$1_5$					4	4
hd	<b>1</b>	<b>9<sub>1</sub></b>	<b>9<sub>2</sub></b>	<b>18<sub>i</sub></b>	<b>16</b>	<b>16</b>	$k_P^G$	<b>1</b>	<b>9<sub>1</sub></b>	<b>9<sub>2</sub></b>	<b>18<sub>i</sub></b>	<b>81</b>	<b>64</b>
							$3^x$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^2$	$3^4$	$3^0$
							soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$1_4$	$1_4$
							hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$1_4$	$1_5$

**Bemerkung:** Nur 81 ist kein Gewichts-Green-Korrespondent. Der korrespondierende PIM 9 bildet mit 8 eine Äquivalenzklasse mit nur einem Sockelkonstituenten. Der PIM 8 korrespondiert zu 64 ( $3 \nmid 64$ ) und der PIM 9 korrespondiert

zu  $81$  ( $3^3 \mid 81$ ) in  $k_P^G$ , womit dieses Beispiel die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Für die Induktionen der Gewichtsmodule, die nicht projektiv einfach sind, gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 9_1 \oplus 9_2 \oplus 18_1^2 \oplus 81, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{64} \oplus 18_2^2 \oplus 18_3^2. \end{aligned}$$

$$p = 17, G = L_2(17), P \in \text{Syl}_{17}(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$$

$k_P^G$	1	17	18 <sub>1</sub>	18 <sub>2</sub>	18 <sub>3</sub>	18 <sub>4</sub>	18 <sub>5</sub>	18 <sub>6</sub>	18 <sub>7</sub>
1	1								
17		1							
3			1	1					
15			1	1					
7					1	1			
11					1	1			
5							1	1	
13							1	1	
9									2
soc	1	17	3	15	7	11	5	13	9
hd	1	17	15	3	11	7	13	5	9

$C_P^G$	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	2 <sub>3</sub>	2 <sub>4</sub>	2 <sub>5</sub>	2 <sub>6</sub>	2 <sub>7</sub>
1 <sub>1</sub>	1								
1 <sub>2</sub>		1							
1 <sub>3</sub>			1	1					
1 <sub>4</sub>			1	1					
1 <sub>5</sub>					1	1			
1 <sub>6</sub>					1	1			
1 <sub>7</sub>							1	1	
1 <sub>8</sub>							1	1	
1 <sub>9</sub>									2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>17</b>	<b>18<sub>1</sub></b>	<b>18<sub>2</sub></b>	<b>18<sub>3</sub></b>	<b>18<sub>4</sub></b>	<b>18<sub>5</sub></b>	<b>18<sub>6</sub></b>	<b>18<sub>7</sub></b>
17 <sup>x</sup>	17 <sup>0</sup>	1	17 <sup>0</sup>						
soc	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>9</sub>
hd	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>

---

**Bemerkung:** Weil  $L_2(17)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

---

---

5.6.21  $G = L_2(19)$ 

$$p = 2, G = L_2(19), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$$

$k_P^G$	1	$20_i^5$	$9_1$	$28_1^2$	$9_2$	$28_2^2$	$36_1^3$	$18_1^3$	$36_2^3$	$18_2^3$
1	1		1		1					
$20_i$		1								
$9_1$			1	2		1				
$9_2$				1	1	2				
$18_1$							2	1		
$18_2$									2	1
soc	1	$20_i$	$9_1$	$9_1$	$9_2$	$9_2$	$18_1$	$18_1$	$18_2$	$18_2$
hd	1	$20_i$	$9_1$	$9_1$	$9_2$	$9_2$	$18_1$	$18_1$	$18_2$	$18_2$
$C_P^G$	$1_1$	$5_i^5$	$3_1$	$3_2$	$7_1^2$	$7_2^2$	$9_1^3$	$6_1^3$	$9_2^3$	$6_2^3$
$1_1$	1									
$5_i$		1								
$1_2$			1			1				
$1_3$				1	1					
$2_1$				1	2	1				
$2_2$			1		1	2				
$3_1$							2	1		
$3_2$							1	1		
$3_3$									2	1
$3_4$									1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>20_i</math></b>	<b><math>9_1</math></b>	<b><math>9_2</math></b>	$28_1$	$28_2$	$36_1$	<b><math>18_1</math></b>	$36_2$	<b><math>18_2</math></b>
$2^x$	$2^0$	$2^2$	$2^0$	$2^0$	$2^2$	$2^2$	$2^2$	2	$2^2$	2
soc	$1_1$	$5_i$	$2_2$	$2_1$	$2_1$	$2_2$	$3_1$	$3_1$	$3_3$	$3_3$
hd	$1_1$	$5_i$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$3_4$

Dabei gilt  $1 \leq i \leq 2$ .

**Bemerkung:** Die Mengen  $\{3_1, 7_2\}$ ,  $\{3_2, 7_1\}$ ,  $\{6_1, 9_1\}$  und  $\{6_2, 9_2\}$  bilden jeweils eine Äquivalenzklasse von PIMs von  $\mathfrak{C}^k$  mit nur einem Sockelkonstituenten. Jede Klasse korrespondiert zu direkten Summanden von  $k_P^G$ , von denen die Dimension des einen Summanden von einer niedrigeren 2-Potenz geteilt wird als der jeweils andere. Jener ist ein Gewichts-Green-Korrespondent, der andere nicht. Alle anderen PIMs bilden eine eigene Äquivalenzklasse und korrespondieren zu einem Gewichts-Green-Korrespondenten. Das steht im Einklang mit der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3

Die Gewichts-Green-Korrespondenten  $18_1, 18_2$  haben Vertex  $Q_1$  der Ordnung 2. Für die Induktionen der Gewichtsmoduln gilt:

$$\begin{aligned} {}^{2_1}S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{18} \oplus_{i=1,2} 18_i \oplus 36_1 \oplus 36_2^2 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 20_i^2, \\ {}^{2_2}S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{18} \oplus_{i=1,2} 18_i \oplus 36_2 \oplus 36_1^2 \oplus_{1 \leq i \leq 2} 20_i^2. \end{aligned}$$

Für die Gewichtsmodule mit einer 2-Sylowgruppe als Vertex ergeben sich folgende Induktionen:

$$\begin{aligned} {}^1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus_{i=1,2} (18_i \oplus 36_i \oplus 28_i) \oplus 20_1^3 \oplus_{2 \leq i \leq 4} 20_i, \\ {}^2 S_N^G &= \mathbf{9}_1 \oplus_{i=1,2} (18_i \oplus 36_i) \oplus 28_1 \oplus 20_1 \oplus_{i=2,3,4} 20_i^2, \\ {}^3 S_N^G &= \mathbf{9}_2 \oplus_{i=1,2} (18_i \oplus 36_i) \oplus 28_2 \oplus 20_1 \oplus_{i=2,3,4} 20_i^2. \end{aligned}$$

$p = 3, G = L_2(19), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$

$k_P^G$	1	$9_i$	$18_j^2$	19	$99^2$	
1	1				4	
$9_i$		1				
$18_j$			1			Dabei gilt $1 \leq i \leq 2$ und $1 \leq j \leq 4$ .
19				1	5	
soc	1	$9_i$	$18_j$	19	19	
hd	1	$9_i$	$18_j$	19	19	

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i^2$	3	$11^2$
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			1			
$2_i$				1		
$1_4$					1	1
$2_5$					1	5
$k_P^G$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{9}_1$	$\mathbf{9}_2$	$\mathbf{18}_i$	$\mathbf{19}$	99
$3^x$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^2$	$3^0$	$3^2$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$2_5$	$2_5$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$1_4$	$2_5$

**Bemerkung:** Nur der direkte Summand 99 von  $k_P^G$  ist kein Gewicht-Green-Korrespondent. Der zugehörige PIM 11 liegt mit dem PIM 3 in einer Äquivalenzklasse, wobei der zum PIM 3 gehörige direkte Summand 19 ein Gewicht-Green-Korrespondent ist. Auch dieses Beispiel bestätigt die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3.

Für die Induktionen der nicht projektiv einfachen Gewichtsmodule nach  $G$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 99 \oplus 9_1 \oplus 9_2 \oplus 18_1^2 \oplus 18_2^2, \\ {}^2 S_N^G &= \mathbf{19} \oplus 99 \oplus 18_3^2 \oplus 18_4^2. \end{aligned}$$

---

---

$$p = 5, G = L_2(19), P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$$

$k_P^G$	$20_i^4$	1	$45_1$	$36_1$	$45_2$	$36_2$	$36_3$	$55^3$
$20_i$	1							
1		1						1
18							2	3
$9_1$			3	2	2	2		
$9_2$			2	2	3	2		
soc	1	$20_i$	$9_1$	$9_1$	$9_2$	$9_2$	18	18
hd	1	$20_i$	$9_1$	$9_2$	$9_2$	$9_1$	18	18

Es gilt  $1 \leq i \leq 4$

$C_P^G$	$4_i^4$	1	$9_1$	$8_1$	$9_2$	$8_2$	$8_3$	$11^3$
$4_i$	1							
$1_1$		1						
$1_2$			3	2	2	2		
$1_3$			2	2	2	2		
$1_4$			2	2	3	2		
$1_5$			2	2	2	2		
$1_6$							2	2
3							2	3

$k_P^G$	$20_i$	1	$45_1$	$36_1$	$45_2$	$36_2$	$36_3$	55
$5^{x5}$		$5^0$	5	$5^0$	5	$5^0$	$5^0$	5
soc	$4_i$	$1_1$	$1_2$	$1_2$	$1_4$	$1_4$	3	3
hd	$4_i$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	3

**Bemerkung:** Die PIMs  $8_1, 9_1$  und  $8_2, 9_2$  sowie  $8_3, 11$  bilden jeweils Äquivalenzklassen und korrespondieren zu den Paaren  $36_1, 45_1$  und  $36_2, 45_2$  bzw.  $36_3, 55$  in  $k_P^G$ . Da die Äquivalenzklassen nur jeweils einen Sockelkonstituenten liefern, bestätigt dies unsere Vermutung, da jeweils nur der Summand einer jeden Klasse Gewichts-Green-Korrespondent ist, dessen Dimension von einer niedrigeren 5-Potenz geteilt wird. Dabei wird die Beobachtung bzgl. der Dimension aus Abschnitt 5.3 ebenfalls bestätigt. Für die Induktionen der Gewichtsmodule nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{36}_1 \oplus 55 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 20_i, \\ {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 45_1 \oplus 45_2 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 20_i, \\ {}^1_3 S_N^G &= \mathbf{36}_2 \oplus 55 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 20_i, \\ {}^1_4 S_N^G &= \mathbf{36}_3 \oplus 55 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 20_i. \end{aligned}$$

---



---


$$p = 19, G = L_2(19), P \in \text{Syl}_{19}(G), |G| = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt:

$$k_P^G = 1 \oplus 19 \oplus_{1 \leq i \leq 8} 20_i.$$

Weil  $L_2(19)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Die explizite Zerlegung des Endomorphismenrings in PIMs ist

$$\text{End}_{kG}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus_{1 \leq i \leq 8} 2_i,$$

wobei die 2-dimensionalen Moduln in dieser Zerlegung Paare von der Form

$$\begin{array}{cc} 1_{2j-1} & 1_{2j} \\ 1_{2j} & 1_{2j-1} \end{array}$$

für  $1 \leq j \leq 4$  bilden.

---



---

**5.6.22**  $G = L_2(27)$ 

$$p = 7, G = L_2(27), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt in unzerlegbare direkte Summanden:

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 6} 28_i^4 \oplus 78_1 \oplus 78_2 \oplus 78_3 \oplus 91_1 \oplus 91_2 \oplus 105^3.$$

$C_P^G$	1	$4_i^4$	$13_1$	$12_1$	$13_2$	$12_2$	$12_3$	$15^3$
$1_1$	1							
$4_i$		1						
$1_2$			4	3	3	3		
$1_3$			3	3	3	3		
$1_4$			3	3	4	3		
$1_5$			3	3	3	3		
$1_6$							3	3
3							3	4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>28_i</math></b>	$91_1$	<b><math>78_1</math></b>	$91_2$	<b><math>78_2</math></b>	<b><math>78_3</math></b>	105
$7^x$	$7^0$	7	7	$7^0$	7	$7^0$	$7^0$	7
soc	$1_1$	$4_i$	$1_2$	$1_2$	$1_4$	$1_4$	3	3
hd	$1_1$	$4_i$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	5	$1_6$	3

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Gruppen  $N_G(Q)/Q$  für die triviale Gruppe und die 7-Sylowgruppe  $Q$  zeigt, dass es sechs projektiv einfache Gewichtsmodule und vier weitere gibt. Da die Dimensionen der Green-Korrespondenten der letzt genannten nicht durch 7 teilbar sein dürfen (vergleiche Bemerkung 3.3.14), zeigt sich, dass  $1, 78_1, 78_2$  und  $78_3$  diese Gewichts-Green-Korrespondenten sind. Dies entspricht genau der Vermutung und der Beobachtung aus Abschnitt 5.3. Denn  $\{12_1, 13_1\}$  und  $\{12_2, 13_2\}$  und  $\{12_3, 15\}$  bilden jeweils zweielementige Äquivalenzklassen von PIMs, die jeweils einen Sockelkonstituenten liefern. Diese Äquivalenzklassen entsprechen den Äquivalenzklassen auf der Menge der unzerlegbaren direkten Summanden  $78_1, 91_1$  und  $78_2, 91_2$  und  $78_3, 105$  von  $k_P^G$ .

$$p = 13, G = L_2(27), P \in \text{Syl}_{13}(G), |G| = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

$$k_P^G = 1 \oplus 13_1 \oplus 13_2 \oplus_{1 \leq i \leq 6} 26_i^2 \oplus 27 \oplus 195^2$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i^2$	$3$	$15^2$
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			1			
$2_i$				1		
$1_4$					1	1
$2_7$					1	7
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>13<sub>1</sub></b>	<b>13<sub>2</sub></b>	<b>26<sub>i</sub></b>	<b>27</b>	<b>195</b>
$13^x$	$13^0$	13	13	13	$13^0$	13
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$2_7$	$2_7$
hd	$1_2$	$1_2$	$1_3$	$2_i$	$1_4$	$2_7$

**Bemerkung:** Die Untersuchung der Gruppen  $N_G(Q)/Q$  für die triviale Gruppe  $Q$  und eine 13-Sylowgruppe zeigt, dass es acht projektiv einfache Gewichtsmoduln und zwei weitere mit Vertizes der Ordnung 13 gibt. Da die Green-Korrespondenten der nicht projektiven Gewichtsmoduln eine Dimension haben müssen, die nicht durch 13 teilbar ist, können dies nur die Summanden 1 und 27 sein. Dadurch werden die Vermutung und die Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt, denn 27, 195 korrespondieren zu der zweielementigen Äquivalenzklasse  $\{3, 15\}$ , die nur einen Sockelkonstituenten liefert.

**5.6.23**  $G = L_2(29)$ 

$$p = 7, G = L_2(29), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt in unzerlegbare direkte Summanden:

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 7} 28_i^4 \oplus_{i=1,2} (15_i \oplus 105_i^2) \oplus 29 \oplus 119^4.$$

$C_P^G$	1	$4_i^3$	$3_1$	$3_2$	5	$15_1^2$	$15_2^2$	$17^4$
$1_1$	1							
$4_i$		1						
$1_2$			1			1		
$1_3$				1			1	
$1_4$					1			1
$2_1$			1			4	3	
$2_2$				1		3	4	
4					1			4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>28_i</math></b>	<b><math>15_1</math></b>	<b><math>15_2</math></b>	<b>29</b>	$105_1$	$105_2$	119
$7^x$	$7^0$	7	$7^0$	$7^0$	$7^0$	7	7	7
soc	$1_1$	$4_i$	$2_1$	$2_2$	4	$2_1$	$2_2$	4
hd	$1_1$	$4_i$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$2_1$	$2_2$	4

**Bemerkung:** Nur diejenigen direkten Summanden von  $k_P^G$ , die projektiv einfach sind oder deren Dimension nicht von 7 geteilt wird, sind Gewichts-Green-Korrespondenten (vergleiche Bemerkung 3.3.14). Tatsächlich zeigt die Untersuchung der Gruppen  $N_G(Q)/Q$  für die triviale Gruppe und die 7-Sylowgruppe, dass es 7 projektiv einfache Gewichtsmoduln und vier Gewichtsmoduln mit den 7-Sylowgruppen als Vertizes gibt. Dies steht im Einklang mit der Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3. Es bilden nämlich die PIMs  $\{15_1, 105_1\}$ ,  $\{15_2, 105_2\}$  und  $\{29, 119\}$  jeweils Äquivalenzklassen, die nur einen Sockelkonstituenten hervorbringen.

$$p = 29, G = L_2(29), P \in \text{Syl}_{29}(G), |G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt in unzerlegbare direkte Summanden:

$$k_P^G = 1 \oplus 29 \oplus_{1 \leq i \leq 13} 30_i.$$

Weil  $L_2(29)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Die explizite Zerlegung von  $\mathfrak{E}^k$  ist

$$\text{End}_{kG}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus_{1 \leq i \leq 13} 2_i,$$

wobei für  $2 \leq j \leq 7$  die Summanden  $2_{2j-1}$  und  $2_{2j}$  von der Form  $\begin{matrix} 1_{2j-1} & 1_{2j} \\ 1_{2j} & 1_{2j-1} \end{matrix}$

sind und  $2_{13}$  von der Form  $\begin{matrix} 1_{15} \\ 1_{15} \end{matrix}$  ist.

---



---

**5.6.24**  $G = L_3(2)$ 

$$p = 2, G = L_3(2), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt in unzerlegbare direkte Summanden:

$$k_P^G = 1 \oplus 8 \oplus 6_1 \oplus 6_2.$$

Weil  $L_3(2)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Für die explizite Zerlegung des Endomorphismenrings ergibt sich:

$$\text{End}_{k_G}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus \begin{matrix} 1_3 \\ 1_4 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1_4 \\ 1_3 \end{matrix}.$$

$$p = 3, G = L_3(2), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$k_P^G = 1 \oplus 6^2 \oplus 3_1 \oplus 3_2 \oplus 7 \oplus 15^2.$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2^2$	$3$	$5^2$
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			1			
$2_1$				1		
$1_4$					1	1
$2_2$					1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>3<sub>1</sub></b>	<b>3<sub>2</sub></b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>15</b>
$3^x$	$3^0$	3	3	3	$3^0$	3
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$2_2$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$1_4$	$2_2$

**Bemerkung:** 15 ist der einzige unzerlegbare direkte Summand von  $k_P^G$ , der kein Gewichts-Green-Korrespondent ist. Dies steht im Einklang mit der Vermutung, da er zum PIM 5 korrespondiert, der zusammen mit dem PIM 3 eine Äquivalenzklasse bildet, die nur einen Sockelkonstituenten liefert. Dabei korrespondiert der PIM 3 zum Summanden 7, der wiederum Gewichts-Green-Korrespondent ist

und dessen Dimension nicht von 3 geteilt wird. Für die Induktionen der nicht-projektiven Gewichtsmoduln nach  $G$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{6}^2 \oplus 15, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{7} \oplus 3_1 \oplus 3_2 \oplus 15. \end{aligned}$$

$$\boxed{p = 7, G = L_3(2), P \in \text{Syl}_7(G), |G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7}$$

Die Zerlegung des Permutationsmoduls in unzerlegbare direkte Summanden ergibt:

$$k_P^G = 1 \oplus 7 \oplus 8_1 \oplus 8_2.$$

Wegen  $L_3(2) \cong \text{PSL}_2(7)$  ist  $L_3(2)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik. Daher ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig. Für die explizite Zerlegung von  $\mathfrak{E}^k$  in PIMs gilt:

$$\text{End}_{kG}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus \begin{array}{c} 1_3 \\ 1_4 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 1_4 \\ 1_3 \end{array}.$$

**5.6.25**  $G = L_3(3)$ 

$$p = 2, G = L_3(3), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$$

Für die Zerlegung des Permutationsmoduls in unzerlegbare direkte Summanden gilt:

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 16_i \oplus 144 \oplus 104 \oplus 26 \oplus 12.$$

$C_P^G$	$1_i$	$1_5$	$9_1$	$9_2$	$3$	$2$
$1_i$	1					
$1_5$		1				
$1_6$			5	3	1	
$1_7$			3	4	1	1
$1_8$			1	1	1	
$1_9$				1		1
$k_P^G$	<b>16<sub>i</sub></b>	<b>1</b>	144	104	<b>26</b>	<b>12</b>
$2^x$	$2^4$	$2^0$	$2^4$	$2^3$	2	$2^2$
soc	$1_i$	$1_5$	$1_6$	$1_6 \oplus 1_7$	$1_6$	$1_7$
hd	$1_i$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$

**Bemerkung:** Es gibt vier projektiv einfache Moduln der Dimension 16 sowie den trivialen, einen 12-dimensionalen und einen 26-dimensionalen Gewichts-Green-Korrespondenten. Die PIMs  $9_1, 9_2, 3, 2$  bilden eine Äquivalenzklasse, die zwei Sockelkonstituenten liefert. Diese PIMs korrespondieren zu unzerlegbaren direkten Summanden, von denen die beiden mit dem niedrigsten 2-Anteil in ihrer Dimension Gewichts-Green-Korrespondenten sind. Die Vermutung und Beobachtung werden insbesondere bestätigt.

Der Gewichts-Green-Korrespondent 12 hat einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung 2. Für die Induktion des entsprechenden Gewichtsmoduls nach  $G$  gilt:

$${}^2S_{N(Q_1)}^G = \mathbf{12} \oplus 104 \oplus 144^2 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 16_i.$$

Des Weiteren hat der Gewichts-Green-Korrespondent 144 Vertex  $Q_2$  der Ordnung 8. Die Induktion des Gewichtsmoduls nach  $G$  ergibt:

$${}^2S_{N(Q_2)}^G = \mathbf{26} \oplus 144 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 16_i.$$

Für den trivialen Gewichtsmodul gilt  ${}^1S_N^G = k_P^G$ .

$$p = 3, G = L_3(3), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$$

Die Zerlegung des Permutationsmoduls in unzerlegbare direkte Summanden gibt:

$$k_P^G = 1 \oplus 27 \oplus 52 \oplus_{i=1,2} (12_i \oplus 13_i \oplus 39_i).$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$6$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$3_4$	$2_1$	$2_2$
$1_1$	1								
$1_2$		1							
$1_3$			2	1	1	1	1		
$1_4$			1	1			1		
$1_5$			1		1	1			
$1_6$			1		1	1			
$1_7$			1	1			1		
$1_8$								1	1
$1_9$								1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>27</b>	<b>52</b>	<b>39<sub>1</sub></b>	<b>39<sub>2</sub></b>	<b>13<sub>1</sub></b>	<b>13<sub>2</sub></b>	<b>12<sub>1</sub></b>	<b>12<sub>2</sub></b>
$3^x$	$3^0$	$3^3$	$3^0$	3	3	$3^0$	$3^0$	3	3
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_7$	$1_6$	$1_4$	$1_5$	$1_9$	$1_8$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$

**Bemerkung:** Weil  $L_3(3)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

**5.6.26**  $G = L_3(4)$ 

$$p = 2, G = L_3(4), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt:

$$k_P^G = 1 \oplus 64 \oplus 20_1 \oplus 20_2 \oplus 105_1 \oplus 105_2.$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$6_1$	$6_2$
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			1	1		
$1_4$			1	1		
$1_5$					3	3
$1_6$					3	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>64</b>	<b>20<sub>1</sub></b>	<b>20<sub>2</sub></b>	<b>105<sub>1</sub></b>	<b>105<sub>2</sub></b>
$2^x$	$2^0$	$2^6$	$2^2$	$2^2$	$2^0$	$2^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_4$	$1_3$	$1_6$	$1_5$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$

**Bemerkung:** Weil  $L_3(4)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

$$p = 3, G = L_3(4), P \in \text{Syl}_3(G), |G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Das folgende Beispiel bedarf ausführlicher Dokumentation, denn es ist das einzige dieser gesamten Beispielsammlung, das eine Erweiterung der Beobachtung aus Abschnitt 5.3 um die Automorphismenaussage nötig macht. Zunächst halten wir die Daten fest.

dim	1	20	35 <sub>1</sub>	35 <sub>2</sub>	35 <sub>3</sub>	45 <sub>1</sub>	45 <sub>2</sub>	63 <sub>1</sub>	63 <sub>2</sub>	64
VFH	1	4	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	5 <sub>1</sub>	5 <sub>2</sub>	7 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	8

Aus Platzgründen verzichten wir bei der Auflistung der Sockel auf das  $\oplus$ -Zeichen.

$k_P^G$	$45_1^5$	$45_2^5$	$63_1^7$	$63_2^7$	1	189	$99_1$	$99_2$	$99_3$	$55_1$	$55_2$	$55_3$	$128^2$
1					1	4	1	1	1	2	2	2	
$45_1$	1												
$45_2$		1											
$63_1$			1										
$63_2$				1									
$15_1$						2	2	1	1	1			2
$15_2$						2	1	2	1		1		2
$15_3$						2	1	1	2			1	2
19						5	2	2	2	2	2	2	2
soc	1	$45_1$	$45_2$	$63_1$	$63_2$	19	$15_1$	$15_2$	$15_3$	19	19	19	$15_1 15_2 15_3$

$C_P^G$	1	$5_1^5$	$5_2^5$	$7_1^7$	$7_2^7$	21	$11_1$	$7_3$	$7_4$	$11_2$	$11_3$	$7_3$	$16^2$
$1_1$	1												
$5_1$		1											
$5_2$			1										
$7_1$				1									
$7_2$					1								
$1_2$						5	2	2	2	2	2	2	2
$1_3$						2	2		1		1	1	2
$1_4$						2		2		1	1	1	
$1_5$						2	1		2	1	1		2
$1_6$						2		1	1	2		1	
$1_7$						2	1	1	1		2		2
$1_8$						2	1	1		1		2	
2						2	2			2	2		4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>45_1</math></b>	<b><math>45_2</math></b>	<b><math>63_1</math></b>	<b><math>63_2</math></b>	189	$99_1$	<b><math>55_1</math></b>	<b><math>55_2</math></b>	$99_2$	$99_3$	<b><math>55_3</math></b>	<b>128</b>
$3^x$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^2$	$3^2$	$3^3$	$3^2$	$3^0$	$3^0$	$3^2$	$3^2$	$3^0$	$3^0$
soc	$1_1$	$5_1$	$5_2$	$7_1$	$7_2$	$1_2$	$1_3$	$1_2$	$1_5$	$1_2$	$1_7$	$1_2$	$1_3 1_4 1_6$
hd	$1_1$	$5_1$	$5_2$	$7_1$	$7_2$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	2

$D_P^G$	1	$45_1^5$	$45_2^5$	$63_1^7$	$63_2^7$	$55_1$	189	$99_1$	$55_2$	$55_3$	$99_2$	$99_3$	128	
1	1													1
$45_1$		1												$5_1$
$45_2$			1											$5_2$
$63_1$				1										$7_1$
$63_2$					1									$7_2$
20						1	1		1	1				4
$35_1$						1	1	1						$3_1$
$35_2$						1			1		1			$3_2$
$35_3$						1				1		1		$3_3$
64							1	1			1	1	2	8
	$1_1$	$5_1$	$5_2$	$7_1$	$7_2$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	2	

**Bemerkung:** Zunächst untersuchen wir die Gruppen  $N_G(Q)/Q$  für alle möglichen 3-Untergruppen  $Q$  von  $P$  und stellen fest, dass es vier projektiv einfache Gewichtsmoduln und fünf Gewichtsmoduln mit Vertices der Ordnung 9 gibt. Damit bestätigt sich zumindest die erste Vermutung, denn es gibt neun verschiedene Sockelkonstituenten.

Für die Beobachtung aus Abschnitt 5.3 müssen wir die Äquivalenzklassen der PIMs betrachten. Es gibt neben den einelementigen Äquivalenzklassen noch zwei weitere, nämlich  $\mathcal{P}_1 = \{7_3, 7_4, 7_5, 21\}$  und  $\mathcal{P}_2 = \{11_1, 11_2, 11_3, 16\}$ . Dabei liefert  $\mathcal{P}_1$  genau einen Sockelkonstituenten, während  $\mathcal{P}_2$  drei Sockelkonstituenten hervorbringt. Nun zeigt sich aber, dass es unter den zu  $\mathcal{P}_1$  korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden genau drei Gewichts-Green-Korrespondenten, nämlich  $55_1, 55_2, 55_3$  gibt, während 189 kein Gewichts-Green-Korrespondent ist. Umgekehrt sind unter den zu  $\mathcal{P}_2$  korrespondierenden Summanden  $99_1, 99_2, 99_3$  keine Gewichts-Green-Korrespondenten, während 128 ein Gewichts-Green-Korrespondent ist.

In  $\mathcal{P}_2$  hätten wir eigentlich drei Gewichts-Green-Korrespondenten erwartet, in  $\mathcal{P}_2$  nur einen. Es scheint, als habe ein Automorphismus diese beiden Klassen vertauscht. Nach dieser Vertauschung gilt wieder die Beobachtung bezüglich der Dimensionen aus Abschnitt 5.3.

Der Automorphismus scheint zudem weitere Eigenschaften zu erfüllen. So fällt auf, dass in jeder Klasse drei gleich-dimensionale Moduln vorkommen, die eine äußerst ähnliche Struktur aufweisen. Dies scheint der Automorphismus berücksichtigen zu müssen.

### 5.6.27 $G = U_3(4)$

$$p = 5, G = U_3(4), P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt:

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 75_i^3 \oplus 116 \oplus 350 \oplus 142^2 \oplus 325^2 \oplus 65^3.$$

$C_P^G$	$1_1$	$3_1^3$	$3_2^3$	$3_3^3$	$3_4^3$	8	14	$10^2$	$13^2$	$5^3$
$1_1$	1									
$3_1$		1								
$3_2$			1							
$3_3$				1						
$3_4$					1					
$1_2$						5	1	1		
$1_3$						1	7	3		
$2_1$						1	3	3		
$2_2$									5	1
$3_5$									1	1
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>75<sub>1</sub></b>	<b>75<sub>2</sub></b>	<b>75<sub>3</sub></b>	<b>75<sub>4</sub></b>	<b>116</b>	350	<b>142</b>	325	<b>65</b>
$5^x$	$5^0$	$5^2$	$5^2$	$5^2$	$5^2$	$5^0$	$5^2$	$5^0$	$5^2$	5
soc	$1_1$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$3_4$	$1_2^2 \oplus 1_3$	$1_3$	$1_3$	$2_2$	$2_2$
hd	$1_1$	$3_1$	$3_2$	$3_3$	$3_4$	$1_2$	$1_3$	$2_1$	$2_2$	$3_5$

**Bemerkung:** Neben den einelementigen Äquivalenzklassen von PIMs gibt es noch zwei weitere:  $\mathcal{P}_1 = \{8, 14, 10\}$  und  $\mathcal{P}_2 = \{5, 13\}$ . Dabei ergeben sich aus  $\mathcal{P}_1$  zwei Sockelkonstituenten und aus  $\mathcal{P}_2$  ein Sockelkonstituent. Tatsächlich korrespondieren 8 und 10 zu den Gewichts-Green-Korrespondenten 142 und 116, während 14 zum Nicht-Gewichts-Green-Korrespondenten 350 korrespondiert. Der zu 5 in  $\mathcal{P}_2$  korrespondierende Summand 65 ist ein Gewichts-Green-Korrespondent, der zu 13 korrespondierende nicht. Damit haben sich auch an diesem Beispiel die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3 bestätigt.

Der Modul 65 hat einen Vertex  $Q$  der Ordnung 5 und für die Induktion vom entsprechenden Gewichtsmodul nach  $G$  gilt:

$${}^5S_{N(Q)}^G = \mathbf{65} \oplus_{1 \leq i \leq 4} 75_i \oplus 325 \oplus 350.$$

Insbesondere sind 325 und 350 projektive Moduln. Die übrigen nicht projektiv einfachen Gewichtsmoduln führen zu folgenden Induktionen:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 65 \oplus 350, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{116} \oplus_{1 \leq i \leq 4} 75_i, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{142} \oplus 65 \oplus 325 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 75_i. \end{aligned}$$

**5.6.28**  $G = U_3(5)$ 

$$p = 5, G = U_3(5), P \in \text{Syl}_5(G), |G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Die Zerlegung des Permutationsmoduls ergibt:

$$k_P^G = 1 \oplus 125 \oplus_{1 \leq i \leq 7} 126_i.$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$2_1$	$2_2$	$2_3$	$2_4$	$2_5$	$2_6$	$2_7$
$1_1$	1								
$1_2$		1							
$1_3$			1	1					
$1_4$			1	1					
$1_5$					1	1			
$1_6$					1	1			
$1_7$							1	1	
$1_8$							1	1	
$1_9$									2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>125</b>	<b>126<sub>1</sub></b>	<b>126<sub>2</sub></b>	<b>126<sub>3</sub></b>	<b>126<sub>4</sub></b>	<b>126<sub>5</sub></b>	<b>126<sub>6</sub></b>	<b>126<sub>7</sub></b>
$5^x$	$5^0$	$5^3$	$5^0$	$5^0$	$5^0$	$5^0$	$5^0$	$5^0$	$5^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_4$	$1_3$	$1_6$	$1_5$	$1_8$	$1_7$	$1_9$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$

**Bemerkung:** Weil  $U_3(5)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{C}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

### 5.6.29 $G = U_4(2)$

$$p = 2, G = U_4(2), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt:

$$k_P^G = 1 \oplus 64 \oplus 90_1 \oplus 90_2 \oplus 45_1 \oplus 45_2 \oplus 44 \oplus 26.$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$4_1$	$4_2$	$4_3$	$4_4$	$3_1$	$3_2$
$1_1$	1							
$1_2$		1						
$1_3$			2	1	1			
$1_4$			1	2		1		
$1_5$			1		2	1		
$1_6$				1	1	2		
$1_7$							2	1
$1_8$							1	2
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>64</b>	<b>90<sub>1</sub></b>	<b>90<sub>2</sub></b>	<b>45<sub>1</sub></b>	<b>45<sub>2</sub></b>	<b>44</b>	<b>26</b>
$2^y$	$2^0$	$2^6$	2	2	$2^0$	$2^0$	$2^2$	2
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$

**Bemerkung:** Weil  $U_4(2)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Der Summand 64 ist ein projektiv einfacher Gewichtsmodul. Der Gewichts-Green-Korrespondent 44 hat einen Vertex  $Q_1$  der Ordnung  $2^4$ . Die Induktion des entsprechenden Gewichtsmoduls nach  $G$  gibt:

$${}^4S_{N(Q_1)}^G = 44 \oplus 64.$$

Die Summanden  $90_1, 90_2$  und 26 haben einen Vertex  $Q_2$  der Ordnung  $2^5$ . Die Induktionen der Gewichtsmoduln ergeben:

$$\begin{aligned} {}^{2_1}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{90}_1, \\ {}^{2_2}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{26} \oplus 64, \\ {}^{2_3}S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{90}_2. \end{aligned}$$

Schließlich haben die übrigen direkten Summanden eine 2-Sylowgruppe als Vertex. Hier ergeben sich folgende Induktionen:

$$\begin{aligned} {}^{1_1}S_N^G &= \mathbf{45}_1 \oplus 90_1, \\ {}^{1_2}S_N^G &= \mathbf{45}_2 \oplus 90_2, \\ {}^{1_3}S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 26 \oplus 44 \oplus 64. \end{aligned}$$

$$p = 3, G = U_4(2), P \in \text{Syl}_3(G), 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt:

$$k_P^G = 1 \oplus 81 \oplus 39_1 \oplus 39_2 \oplus 40 \oplus 120.$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$3_1$	$3_2$	$4_1$	$4_2$
$1_1$	1					
$1_2$		1				
$1_3$			2	1		
$1_4$			1	2		
$1_5$					3	1
$1_6$					1	3
$k_P^G$	<b>1</b>	<b>81</b>	<b>39<sub>1</sub></b>	<b>39<sub>2</sub></b>	<b>40</b>	<b>120</b>
$3^x$	$3^0$	$3^4$	3	3	3	$3^0$
soc	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$

**Bemerkung:** Weil  $U_4(2) \cong S_4(3)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Der Summand 81 ist projektiv einfach. Die Summanden  $39_1, 39_2$  und 120 haben Vertizes der Ordnung 81. Dabei sind nur die Vertizes von  $39_1$  und 120 konjugiert. Für die Induktionen ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^3_1 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{39}_1 \oplus 81, \\ {}^3_2 S_{N(Q_1)}^G &= \mathbf{120}, \\ {}^3 S_{N(Q_2)}^G &= \mathbf{39}_2 \oplus 81. \end{aligned}$$

Die beiden übrigen Gewichts-Green-Korrespondenten haben eine 3-Sylowgruppe als Vertex. Hier ergeben die Induktionen folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} {}^1_1 S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 39_1 \oplus 39_2 \oplus 81, \\ {}^1_2 S_N^G &= \mathbf{40} \oplus 120. \end{aligned}$$

### 5.6.30 $G = \mathrm{Sp}_4(4)$

$$p = 2, G = \mathrm{Sp}_4(4), P \in \mathrm{Syl}_2(G), |G| = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt:

$$k_P^G = 1 \oplus 256 \oplus 84_1 \oplus 84_2 \oplus_{1 \leq i \leq 4} 85_i \oplus_{1 \leq i \leq 4} 340_i \oplus_{1 \leq i \leq 4} 425_i$$

$C_P^G$	$1_1$	$1_2$	$8_1$	$4_1$	$8_2$	$4_2$	$4_3$	$4_4$	$8_3$	$4_5$	$4_6$	$8_4$	$4_7$	$4_8$	$3_1$	$3_2$
$1_1$	1															
$1_2$		1														
$1_3$			2	1	2	1	1	1								
$1_4$			1	1	1			1								
$1_5$			2	1	2	1	1	1								
$1_6$			1		1	1	1									
$1_7$			1		1	1	1									
$1_8$			1	1	1			1								
$1_9$									2	1	1	2	1	1		
$1_{10}$									1	1		1	1	1		
$1_{11}$									1		1	1		1		
$1_{12}$									2	1	1	2	1			
$1_{13}$									1	1		1	1			
$1_{14}$									1		1	1		1		
$1_{15}$															2	1
$1_{16}$															1	2
soc	$1_1$	$1_2$	$1_5$	$1_8$	$1_3$	$1_7$	$1_6$	$1_4$	$1_{12}$	$1_{13}$	$1_{14}$	$1_9$	$1_8$	$1_{11}$	$1_{15}$	$1_{16}$
hd	$1_1$	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	$1_7$	$1_8$	$1_9$	$1_{10}$	$1_{11}$	$1_{12}$	$1_{13}$	$1_{14}$	$1_{15}$	$1_{16}$

**Bemerkung:** Alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  sind Gewicht-Green-Korrespondenten. Weil  $\mathrm{Sp}_4(4)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

**5.6.31**  $G = \text{Sz}(8)$ 

$$p = 2, G = \text{Sz}(8), P \in \text{Syl}_2(G), |G| = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

Es gilt für die Zerlegung des Permutationsmoduls:

$$k_P^G = 1 \oplus 64 \oplus_{1 \leq i \leq 6} 65_i.$$

Weil  $\text{Sz}(8)$  eine Chevalley-Gruppe in definierender Charakteristik ist, ist der Endomorphismenring  $\mathfrak{E}^k$  quasi-Frobenius (Satz 3.4.8). Nach der Bemerkung auf Seite 115 ist die Vermutung 5.3.1 hier richtig.

Der Endomorphismenring zerlegt sich wie folgt in unzerlegbare projektive Summanden:

$$\text{End}_{kG}(k_P^G) = 1_1 \oplus 1_2 \oplus_{1 \leq i \leq 6} 2_i,$$

wobei die PIMs  $2_{2j-1}$  und  $2_{2j}$  für  $2 \leq j \leq 4$  die Struktur  $\begin{matrix} 1_{2j-1} & 1_{2j} \\ 1_{2j} & 1_{2j-1} \end{matrix}$  haben.

Bis auf den projektiv einfachen  $kG$ -Modul 64 haben zudem alle unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$  eine 2-Sylowgruppe als Vertex. Die Induktionen der nicht projektiven Gewichtsmodule ergeben:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{1} \oplus 64, \\ {}^iS_N^G &= \mathbf{65}_i, \text{ für } 1 \leq i \leq 7. \end{aligned}$$

$$p = 13, G = \text{Sz}(8), P \in \text{Syl}_{13}(G), |G| = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

Der Permutationsmodul zerlegt sich wie folgt in unzerlegbare direkte Summanden:

$$k_P^G = 1 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 65_i^5 \oplus 91^7 \oplus 78_1 \oplus 105 \oplus 78_2 \oplus 14_1 \oplus 14_2 \oplus 169^2.$$

$C_P^G$	1	$5_i^3$	$7^7$	$6_1$	9	$6_2$	$2_1$	$2_2$	$13^2$
$1_1$	1								
$5_i$		1							
7			1						
$1_2$				2		1		1	1
$1_3$					3				3
$1_4$				1		2	1		1
$1_5$						1	1		
$1_6$				1				1	
2				1	3	1			4
$k_P^G$	<b>1</b>	<b><math>65_i</math></b>	<b>91</b>	$78_1$	<b>105</b>	$78_2$	<b><math>14_1</math></b>	<b><math>14_2</math></b>	169
$13^x$	$13^0$	13	13	13	$13^0$	13	$13^0$	$13^0$	$13^2$
soc	$1_1$	$5_i$	7	$1_2$	2	$1_4$	$1_4$	$1_2$	2
hd	$1_1$	$5_i$	7	$1_2$	$1_3$	$1_4$	$1_5$	$1_6$	2

**Bemerkung:** Die PIMs  $2_1, 6_1$  und  $2_2, 6_2$  sowie 9, 13 bilden jeweils zweielementige Äquivalenzklassen mit jeweils nur einem Sockelkonstituenten. Tatsächlich ist unter den korrespondierenden unzerlegbaren direkten Summanden von  $k_P^G$ , nämlich  $14_1, 78_1$  und  $14_2, 78_2$  und  $105, 169$ , genau einer ein Gewichts-Green-Korrespondent. Dieser zeichnet sich gemäß der zweiten Vermutung dadurch aus, dass seine Dimension von einer niedrigeren 13-Potenz (nämlich  $13^0$ ) als die Dimension seines Partners geteilt wird. Für die Induktionen der nicht projektiv einfachen Gewichtsmoduln ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^1S_N^G &= \mathbf{14}_1 \oplus 78_1 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 65_i \oplus 91^3, \\ {}^2S_N^G &= \mathbf{14}_2 \oplus 78_2 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 65_i \oplus 91^3, \\ {}^3S_N^G &= \mathbf{1} \oplus_{1 \leq i \leq 3} 65_i^2, \\ {}^4S_N^G &= \mathbf{105} \oplus 169 \oplus_{1 \leq i \leq 3} 65_i \oplus 91. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Summanden  $78_1, 78_2$  und 169 projektive  $kG$ -Moduln. Insgesamt bestätigt auch dieses Beispiel die Vermutung und Beobachtung aus Abschnitt 5.3.

# Index

- $BN$ -Paar, 70
  - zerfallend, 70
- $G$ -Algebra, 75
  - innere, 75
  - projektiv, 84
  - relativ projektiv, 84
- $\mathbf{F}$ -zentrisch, 61
- $\mathcal{O}$ -Form, 10
- $p$ -modulares
  - System, 1
  - Zerfallungssystem, 1
- Adjazenzmatrix, 26
  - kollabierte, 41
- Algebra, 3
  - primitive, 77
- Alperins Gewichtsvermutung, 62
- Automorphismus
  - innerer, 74
- Blockidempotent, 9
- Brauer-Homomorphismus
  - Algebra, 78
  - Modul, 79
- Brauer-Paar von  $G$ , 59
- Brauer-Quotient
  - Algebra, 78
  - Modul, 79
- Brauer-Reziprozität, 12
- Brauers erster Hauptsatz, 58
- Burry, Satz von, 97
- Burry-Carlson-Puig, Satz von, 55
- Cartan-Matrix, 7
- Darstellung
  - natürliche, 41
- Defekt, 56
  - von  $G$ -Algebren, 87
- Defektgruppe, 56
  - von  $G$ -Algebren, 87
- duale Basis, 13
- Einbettung, 75
  - bezüglich  $H_\alpha$ , 80
- Exomorphismus
  - allgemein, 75
  - von  $G$ -Algebren, 77
- Fitting-Korrespondenz, 5
- Fixpunkt, 76
- Fixpunktmenge, 20
- Frame-Zahl, 43
- Fusions-System
  - auf  $\mathbb{B}$ , 60
  - auf  $P$ , 59
- gepaarte Bahn, 24
- Gewicht, 60
- Gewichts-
  - Green-Korrespondent, 60
  - modul, 60
  - untergruppe, 60
- Gitter, 3
- Green-Korrespondent, 55
- Green-Korrespondenz, 55
  - $G$ -Algebren, 93
- Hanaki, Satz von, 43
- Hecke-Algebra, 20
- Ideal, 1

- Idempotent, 4
  - orthogonales, 4
  - primitives, 4
  - zentrales, 4
- induzierte Algebra, 85
- Jacobson-Radikal, 1
- kanonische Einbettung, 86
- Kategorie auf  $P$ , 58
- Klassen-Nebenklassen-Tafel, 30
  - reduzierte, 30
- Knörr, Satz von, 57
- Kondensation, 8
- lokal punktierte Gruppe, 84
- lokaler Punkt, 84
- Lokalisierung
  - an punktierter Gruppe, 80
- Mackey, Satz von, 54
- Modul
  - einfacher, 2
  - frei, 2
  - induzierter, 2
  - liftbarer, 11
  - projektiver, 6
  - regulärer, 2
  - restringierter, 2
  - unzerlegbarer, 2
- Multiplizitäts-
  - algebra von  $H_\alpha$ , 80
  - modul von  $H_\alpha$ , 80
- Permutationsdarstellung, 17
- Permutationsmodul, 17
- PIM, 6
- projektiv, 83
  - relativ, 54
- Puig-Korrespondenz, 92
- Punkt, 74
- punktierte Defektgruppe, 87
- punktierte Gruppe, 80
- quasi-Frobenius, 68
- Quelle, 55
- Quellenalgebra, 87
- Quellenpunkt, 87
- radikale  $p$ -Untergruppe, 60
- Ree, Formel von, 24, 29
- reguläre Darstellung, 41
- relativ projektiv, 83
- Restriktion
  - einer  $G$ -Algebra, 76
  - eines Exomorphismus, 77
- Schur-Basis, 26
- Schur-Element, 16
- Spurabbildung
  - Algebra, 78
  - Modul, 78
- Spurform, 13
- Standardbasis, 28
- Standardbasis-Elemente, 28
- Strukturkonstanten, 27
- symmetrisch, 13
- Valenzen, 25
- Vertex, 54
- vollständig  $\mathbf{F}$ -normalisiert, 59
- Zentralisatorring, 27
- Zerfällungskörper, 3
- Zerlegungsmatrix
  - einer Algebra, 12
  - einer Gruppe, 12
  - eines Blocks, 12
- Zerlegungszahl, 12

# Literaturverzeichnis

- [AB79] J. L. Alperin und M. Broué. Local methods in block theory. *Ann. of Mathematics*, 110:143–157, 1979. 59, 60
- [AC95] J. An und M. Conder. The Alperin and Dade Conjectures for the Simple Mathieu Groups. *Communications in Algebra*, 23(8):2797–2823, 1995. 63
- [AF90] J. L. Alperin und P. Fong. Weights for Symmetric and General Linear Groups. *Journal of Algebra*, 131(1):369–379, 1990. vi, 63
- [Alp87] J. L. Alperin. Weights for finite groups. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 47:369–379, 1987. v, 54, 55, 56, 58, 62, 63
- [Alp93] J. L. Alperin. *Local representation theory*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, New York, 1993. Volume 11. vi, 9, 58, 59, 60, 61, 62
- [Alp08] J. L. Alperin. On the center of a Hecke Algebra. *Journal of Algebra*, 319:777–778, 2008. vii, 34, 39
- [An97] J. An. The Alperin and Dade conjectures for the Simple Held Group. *Journal of Algebra*, 190:34–57, 1997. 63
- [BI84] E. Bannai und T. Ito. *Association Schemes*. Algebraic Combinatorics I. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., London, 1984. 23, 26
- [Bur82] D.W. Burry. Components of induced modules. *Journal of Algebra*, 87:483–492, 1982. viii, 97
- [Cab84] M. Cabanes. Brauer morphisms between modular Hecke algebras. *Journal of Algebra*, 115(1):1–31, 1984. vi, 63, 70, 90, 91, 92, 114
- [CR81] C.W. Curtis und I. Reiner. *Methods of Representation Theory*. Pure & Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York, 1981. Volume 1. vii, 9, 14, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 29, 35, 36, 45

- [Dad92] E. C. Dade. Counting characters in blocks. *Inventiones Mathematicae*, 109:187–210, 1992. 63
- [EP99] G. Entz und H. Pahlings. *The Dade conjecture for the McLaughlin group*. Number 1, 260 in London Mathematical Society Lecture Note Series, Groups St. Andrews 1997 in Bath. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 63
- [Fei82] W. Feit. *The Representation Theory of Finite Groups*. North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1982. Volume 1. 8
- [Fit33] H. Fitting. Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. *Math. Annalen*, 107:514–542, 1933. 4
- [Fle90] P. Fleischmann. Projective simple modules of symmetric algebras and their specializations with applications to Hecke algebras. *Arch. Math.*, 55:247–258, 1990. 16
- [GP00] M. Geck und G. Pfeiffer. *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*. London Mathematical Society Monographs, New Series. Oxford University Press, Oxford, 2000. 15, 16
- [Gre78] J. A. Green. On a Theorem of H. Sawada. *Journal of the London Math. Soc. (2)*, 18:247–252, 1978. vi, viii, 53, 66, 68, 70, 79, 114
- [Gre85] J. A. Green. Functors on categories of finite group representations. *J. Pure Appl. Algebra*, 37:265–298, 1985. 94
- [Han00] A. Hanaki. Semisimplicity of Adjacency Algebras of Association Schemes. *Journal of Algebra*, 225(1):124–129, 2000. 43
- [HL89] G. Hiss und K. Lux. *Brauer Trees of Sporadic Groups*. Oxford University Press, New York, 1989. 106, 107
- [IN95] I. M. Isaacs und G. Navarro. Weights and Vertices for Characters of  $\pi$ -Separable Groups. *Journal of Algebra*, 177:339–366, 1995. 62
- [Jac04] J. Jacob. Representation Theory of Association Schemes, 2004. Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen. 31, 42
- [Kes06] R. Kessar. The Solomon system  $\mathcal{F}_{\text{sol}}(3)$  does not occur as fusion system of a 2-block. *Journal of Algebra*, 296:409–425, 2006. 61
- [Knö79] R. Knörr. On the vertices of irreducible modules. *Annales of mathematics*, 110:487–499, 1979. 57

- [KR89] R. Knörr und G. R. Robinson. Some remarks on a conjecture of Alperin. *Journal London Math. Soc.*, 39(2):48–60, 1989. 66
- [Lan83] P. Landrock. *Finite Group Algebras and their Modules*. London Mathematical Society, Lecture Notes Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Volume 84. 6, 7, 9, 10, 11, 12, 17, 20, 45, 46, 47, 49, 55, 87, 107
- [Lan86] P. Landrock. The Modular Hecke Algebra of a Sylow  $p$ -Subgroup. *Journal of Algebra*, 104:141–145, 1986. 56
- [Lin04] M. Linckelmann. Fusion category algebras. *Journal of Algebra*, 277:222–235, 2004. 60, 61
- [Mül03] J. Müller. *On Endomorphism Rings and Character Tables*. Habilitationsschrift, Aachen, 2003. 8, 19
- [NT89] H. Nagao und Y. Tsushima. *Representation of Finite Groups*. Academic Press, Boston, 1989. 4, 5, 8, 10, 11, 21, 22, 38, 54, 55, 69
- [Oku] T. Okuyama. Vertices of irreducible modules of  $p$ -solvable groups. (undated preprint). 62
- [Pui80] L. Puig. Local block theory in  $p$ -solvable groups. *Proc. Symp. Pure Math.*, 37:385–388, 1980. 73
- [Pui81] L. Puig. Pointed Groups and Construction of Characters. *Math. Z.*, 176:209–216, 1981. 73, 92
- [Pui84] L. Puig. Introduction à la théorie des représentations modulaires des groupes finis. *handwritten lecture notes*, 1984. 73
- [Pui88a] L. Puig. Pointed Groups and Construction of Modules. *Journal of Algebra*, 116:7–129, 1988. 73, 92
- [Pui88b] L. Puig. Vortex et sources des foncteurs simples. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 306:223–226, 1988. 73
- [Rob88] G. R. Robinson. Some Remarks on Permutation Modules. *Journal of Algebra*, 118:46–62, 1988. 55
- [Rob94] G. R. Robinson. Some Remarks on Hecke Algebras. *Journal of Algebra*, 163:806–812, 1994. 46, 51
- [RS90] G. R. Robinson und R. Staszewski. More on Alperin’s conjecture. *Astérisque*, 181-182:237–255, 1990. 61

- 
- [Sco73] L. L. Scott. Modular permutation representation. *Transactions o. t. American Math. Society*, 175:101–121, 1973. 13, 17
- [Szö98] M. Szöke. *Examining Green Correspondents of Weight Modules*. Aachener Beiträge zur Mathematik. Wissenschaftsverlag Mainz, Aachen, 1998. Band 24. 60, 63, 64, 101, 104, 231
- [Thé95] J. Thévenaz. *G-Algebras and Modular Representation Theory*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1995. viii, 73, 74, 75, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 93, 94
- [Tin80] N. Tinberg. Modular representations of algebraic groups with insaturated split  $BN$ -pairs. *Canad. J. Math.*, 32(3), 1980. vii, 70
- [Wei76] B. Weisfeiler, Herausgeber. *On Construction and Identification of Graphs*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Volume 558. 43
- [Zie05] P.-H. Zieschang. *Theory of Association Schemes*. Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. 34

# Curriculum Vitae

Natalie Naehrig, geb. Ganser  
naehrig@math.rwth-aachen.de

Geburtsdatum: 17. Juli 1976  
Geburtsort: Stolberg (Rhld.)  
Adresse: Gallierweg 16, 52223 Stolberg  
Nationalität: Deutsch

## Familie

Mutter: Doris Elisabeth Ganser, geb. Neumann  
Vater: Günter Ganser  
2002 Geburt meines Sohnes Julius Naehrig  
2001 Heirat mit Michael Naehrig  
1999 Geburt meines Sohnes Lukas Naehrig

## Grad

2002 Diplom-Mathematikerin, Lehrstuhl D für Mathematik,  
RWTH Aachen University, Deutschland  
Betreuer: Prof. Dr. Gerhard Hiß

## Schulbildung und Studium

08/2008 Doktorprüfung  
10/2004–08/2008 Doktorandin von Prof. Dr. G. Hiß  
01/2003–10/2004 Stipendiatin des Graduiertenkollegs  
Hierarchie und Symmetrie in Mathematischen Modellen  
1997 – 2002 Studium in Mathematik an der RWTH Aachen  
1996 – 1997 Studium in Medizin an der RWTH Aachen  
1988 – 1996 Besuch des Goethe-Gymnasiums in Stolberg mit Abschluss Abitur  
1984 – 1988 Besuch der kath. Grundschule Bischofstraße in Stolberg

18.08.2008

